

Estábamos probando el

Teorema (Hille-Yosida)

Sea A un operador maximal monótono sobre un espacio de Hilbert H (de producto escalar $(\cdot, \cdot)$ y norma $\|\cdot\|$). Entonces para todo $u_0 \in D(A)$, existe una única

$$u \in C^1([0, \infty); H) \cap C^0([0, \infty); D(A))$$

($D(A)$ dotado de la norma del grafo de A) tal que:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & \text{ sobre } [0, \infty) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Además,

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \quad \text{y} \quad \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| = \|Au(t)\| \leq \|Au_0\| \quad \forall t \geq 0.$$

donc. — En la clase de ayer, 21/Junio/2007, probamos:

Etapa 1: Unicidad

Etapa 2 :— Las estimaciones siguientes para la sol. del pt. regularizado en A_λ en reemplazo de A :

$$\left| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right| = |A_\lambda u_\lambda(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0, \forall \lambda > 0$$

Etapa 3 .— $\forall \lambda, \mu > 0, \forall t \geq 0$

$$(2) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_\lambda - u_\mu|^2 \leq -(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu)$$

Mayorando esta desigualdad resulta que, para $\forall t \geq 0, (u_\lambda(t))$ es de Cauchy, y entonces converge cuando $\lambda \rightarrow 0$ hacia un límite que denotaremos $u(t)$. Pasando al límite en (2) cuando $\mu \rightarrow 0$, sigue que

$$|u_\lambda(t) - u(t)| \leq 2\sqrt{\lambda t} |Au_0|$$

y consecuentemente, sigue que la CV es uniforme en t sobre el intervalo acotado $[0, T]$, y así $u \in C^0([0, \infty); H)$.

Etapa 4 .— Supongamos por un momento que $u_0 \in D(A^2)$, i.e., que $u_0 \in D(A)$ y $Au_0 \in D(A)$. Entonces probaremos que $\frac{du_\lambda}{dt}(t)$ converge cuando $\lambda \rightarrow 0$, para todo $t \geq 0$, y que esta CV es uniforme en t sobre cada intervalo acotado $[0, T]$.

En efecto, pongamos $v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}$, de modo que $\frac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = 0$.

Procediendo a como lo hicimos antes en la 3^{ra} etapa, se llega a una desigualdad análoga a (2) para v_λ , y entonces

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_\lambda - v_\mu|^2 \leq (|A_\lambda v_\lambda| + |A_\mu v_\mu|) (\lambda |A_\lambda v_\lambda| + \mu |A_\mu v_\mu|)$$

y usando el lema 1 de la clase anterior, sigue que

$$|A_\lambda v_\lambda| \leq |A_\lambda v_\lambda(0)| = |A_\lambda A_\lambda u_0|$$

Análogamente,

$$|A_\mu v_\mu| \leq |A_\mu v_\mu(0)| = |A_\mu A_\mu u_0|$$

Por otro lado, puesto que $Au_0 \in D(A)$, se tiene

$$A_\lambda A_\lambda u_0 = J_\lambda A J_\lambda A u_0 = J_\lambda J_\lambda A A u_0 = J_\lambda^2 A u_0$$

y entonces

$$|A_\lambda A_\lambda u_0| \leq |A u_0|, \quad |A_\mu A_\mu u_0| \leq |A u_0|$$

Se concluye

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_\lambda - v_\mu|^2 \leq 2(\lambda + \mu) |A u_0|^2.$$

Así, al igual como en la 3^{ra} etapa, sigue $v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}(t)$ converge cuando $\lambda \rightarrow 0$ para todo $t \geq 0$, y la convergencia es uniforme en t sobre el intervalo acotado $[0, T]$.

5^{ta} Etapa. — Exhibiremos una solución de (1), bajo la hipótesis

$u_0 \in D(A^2)$. En efecto, según lo anterior, sabemos que para todo $T < +\infty$:

$$\begin{cases} u_\lambda(t) \rightarrow u(t), \text{ cuando } \lambda \rightarrow 0, \text{ uniforme}^{\text{ente}} \text{ sobre } [0, T] \\ \frac{du_\lambda(t)}{dt} \text{ converge, cuando } \lambda \rightarrow 0, \end{cases}$$

Se concluye que $u \in C^1([0, \infty); H)$ y que $\frac{du_\lambda}{dt}(t) \rightarrow \frac{du}{dt}(t)$ cuando $\lambda \rightarrow 0$, uniforme^{ente} sobre $[0, T]$.

Escribamos la ecuación para u_λ en la forma:

$$(3) \quad \frac{du_\lambda}{dt}(t) + A(J_\lambda u_\lambda(t)) = 0$$

Notemos que $J_\lambda u_\lambda(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} u(t)$ pues

$$\begin{aligned} |J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)| &\leq |J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \\ &\leq |u_\lambda(t) - u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Aplicando el hecho que el grafo de A es cerrado, se deduce de (3) que $u(t) \in D(A) \forall t \geq 0$ y que

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = 0.$$

Finalmente, como $u \in C^1([0, \infty); H)$, la función $t \mapsto Au(t)$

es continua de $[0, \infty)$ en H y entonces $u \in \mathcal{C}^0([0, \infty); D(A))$, en $D(A)$ dotado de la norma del grafo.

Así, hemos obtenido una solución de (1) que satisface:
 $|u(t)| \leq |u_0| \quad \forall t \geq 0$ y $|\frac{du}{dt}(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0$.

Para concluir, necesitamos

lema Sea $u_0 \in D(A)$, luego, $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{u}_0 \in D(A^2)$ tal que
 $|u_0 - \bar{u}_0| < \varepsilon$ y $|Au_0 - A\bar{u}_0| < \varepsilon$,
 i.e., $D(A^2)$ es denso en $D(A)$ para la norma del grafo.

dem. Sea $u_0 = J_\lambda u_0 = (I + A)^{-1} u_0$, de manera que $\bar{u}_0 \in D(A)$
 y $\bar{u}_0 + \lambda A\bar{u}_0 = u_0$. luego $A\bar{u}_0 \in D(A)$, i.e., $\bar{u}_0 \in D(A^2)$.
 Además, se sabe que $A\bar{u}_0 = (AJ_\lambda)u_0 = A_\lambda u_0 = J_\lambda Au_0$ y

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \underbrace{|J_\lambda u_0 - u_0|}_{=0} = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} |J_\lambda Au_0 - Au_0| = 0$$

Elegiendo $\lambda > 0$ suficientemente ^{pequeño} se obtiene lo deseado.

Etapas 6 — Conclusión: Sea $u_0 \in D(A)$. Gracias al lema precedente, existe una sucesión (u_n) en $D(A^2)$ tal que $u_n \rightarrow u_0$ y $Au_n \rightarrow Au_0$. Por la etapa 5 se sabe que existe una sucesión de soluciones u_n del problema:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{du_n}{dt} + Au_n = 0 \text{ sobre } [0, \infty) \\ u_n(0) = u_n \end{cases}$$

Además, por el lema 2 de la clase anterior:

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leq |u_{0n} - u_{0m}| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

$$\left| \frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t) \right| \leq |Au_{0n} - Au_{0m}| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

Así,

$$\begin{aligned} u_n(t) &\longrightarrow u(t) \quad \text{uniforme}^{\text{ente}} \text{ sobre } [0, \infty) \\ \frac{du_n}{dt}(t) &\longrightarrow \frac{du}{dt}(t) \longrightarrow [0, \infty) \end{aligned}$$

con $u \in C^1([0, \infty); H)$. Pasando al límite en (4), gracias al hecho que A es cerrado, se ve que $u \in C^0([0, \infty); D(A))$ y que u resuelve (1). ■

Chao, nos vemos al regreso de vacaciones. Que las vaya muy bien de al examen.

Saludos, un abrazo,

Carlos García