



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA47A: Optimización Combinatorial
Profesor: Roberto Cominetti
Auxiliares: Raul Aliaga Diaz, Cristóbal Guzmán

Clase Auxiliar 10/04/07

P1. Formule los siguientes problemas como problemas de flujo máximo y obtenga una solución cuando se le provea de una instancia:

- (a) Una ciudad tiene r residentes R_1, R_2, \dots, R_r ; q clubes C_1, C_2, \dots, C_q y p partidos políticos P_1, P_2, \dots, P_p . Cada residente es miembro de al menos un club y puede pertenecer exactamente a un partido político. Cada club debe nominar a uno de sus miembros para que lo represente en el consejo gubernamental de la ciudad, de modo que el número de miembros del consejo perteneciendo al partido político P_k es a lo más u_k . ¿Es posible encontrar un consejo tal que satisfaga la propiedad de “balanceo”?
- (b) Sea una matriz de $p \times q$ de números reales $D = d_{ij}$, con suma por filas α_i y suma de columnas β_j . Podemos redondear cada real a a enteros de la forma: $\lceil a \rceil$ o $\lfloor a \rfloor$, y la decisión de a que entero redondear es a elección nuestra. El problema consiste en redondear los elementos de la matriz, junto con las sumas por filas y por columnas, de modo que las sumas sigan siendo consistentes.

Considere la siguiente instancia:

| | | | |
|-------------------|----------------|------|------|
| | Suma por filas | | |
| | 3,1 | 6,8 | 7,3 |
| | 9,6 | 2,4 | 0,7 |
| | 3,6 | 1,2 | 6,5 |
| Suma por columnas | 16,3 | 10,4 | 14,5 |

P2. *Teorema de Menger* Sean $G = (V, E)$ un grafo dirigido y $s, t \in V$ dos nodos fijos. Llamamos conectividad-arco (resp. conectividad-nodo) al número máximo de caminos de s a t disjuntos en los arcos (resp. nodos). Asimismo, llamamos vulnerabilidad-arco (resp. vulnerabilidad-nodo) al número mínimo de arcos (resp. nodos) que es necesario eliminar para desconectar s de t . Probar que:

- (a) conectividad-arco=vulnerabilidad-arco.
(b) conectividad-nodo=vulnerabilidad-nodo.

P3. Naciones unidas pretende crear el *meta-comité*. Para ello, cada uno de los comités existentes debe designar un representante de modo tal que una misma persona no represente a más de un comité.

Lo anterior es imposible si hay más comités que personas. Más generalmente, para formar el meta-comité es necesario que se satisfaga la condición:

- (H) En todo subconjunto de comités el número total de personas involucradas es al menos igual a la cantidad de comités considerados.

Demuestre definiendo la red apropiada, que la condición es también suficiente para la creación de un meta comité, utilizando flujo máximo-corte mínimo.