CÁLCULO DIFERENCIAL Y DE VARIACIONES

PATRICIO FELMER & JUAN PEYPOUQUET

Clase Auxiliar VIII: 14 de mayo de 2007.

Funciones de Lyapunov y estabilidad. Sea $X : \mathbf{R} \times \Omega \to \mathbf{R}^n$ una función continua en el par y localmente Lipschitz en su segunda variable. Supongamos que $X(t, 0) = 0$ para todo $t \in \mathbf{R}$, de modo que el 0 es un equilirio de la ecuación $\dot{x} = X(t, x)$. Decimos que $V : \mathbf{R} \times \Omega \to \mathbf{R}$ es una *función de Lyapunov* para la ecuación y el conjunto $\{0\}$ si es de clase $\mathcal{C}^1$ y satisface:

i) $V(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$;
ii) Existe una función continua $w : \Omega \to \mathbf{R}$ tal que $w(x) > 0$ para todo $x \in \Omega \setminus \{0\}$ y $V(t, x) \geq w(x)$ para todo $t \geq 0$; y
iii) $\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, x) X_i(t, x) \leq 0$ para $t \geq 0$ y $x \in \Omega$.

Probaremos lo siguiente:

(1) Si existe una función de Lyapunov para $\dot{x} = X(t, x)$ y el conjunto $\{0\}$, entonces el 0 es un equilibrio estable.
(2) Si $V : B(0, r) \to \mathbf{R}_+$ es una función de Lyapunov para $\dot{x} = X(x)$ y $\{0\}$, y si además $\nabla V(x) \cdot X(x) < 0$ (función de Lyapunov *estricta*) para todo $x \in B(0, r) \setminus \{0\}$, entonces el 0 es un equilibrio asintóticamente estable.
(3) Sea A una matriz cuyos valores propios tienen todos parte real negativa. La ecuación $\dot{x} = Ax$ tiene una función de Lyapunov estricta de la forma $V(x) = \langle x, Bx \rangle$. Estrategia: Veremos primero que si C es una matriz simétrica y definida positiva, entonces la matriz
$$B = \int_0^\infty e^{A^* s} C e^{As} \, ds$$
es simétrica, definida positiva y cumple que $A^*B + BA$ también es simétrica y definida positiva.
(4) Sea A como arriba y supongamos que $f(x) = o(\|x\|)$. Entonces el 0 es un equilibrio asintóticamente estable de la ecuación $\dot{x} = Ax + f(x)$.
(5) Suponga que existe una función $\mathcal{V} : B(0, r) \to \mathbf{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ con $V(0) = 0$ y $\nabla V(x) \cdot X(x) < 0$ si $x \neq 0$. Suponga además que para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ existe $\xi \in B(0, \varepsilon)$ tal que $V(\xi) < 0$. Entonces el 0 es un equilibrio inestable para la ecuación $\dot{x} = X(x)$.