

CÁLCULO DIFERENCIAL Y DE VARIACIONES

PATRICIO FELMER & JUAN PEYPOUQUET

CLASE AUXILIAR VII: 7 DE MAYO DE 2007.

Ecuación de Ricatti. Sea E un espacio de Banach y denotemos $F = \mathcal{L}(E; E)$. Consideremos aplicaciones continuas A, B, C y D de un intervalo $I = (a, b)$ en F .

- (1) Sean $R, S : I \times I \longrightarrow F$ los resolventes de las siguientes ecuaciones en F :

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad \text{y} \quad X'(t) = X(t)B(t).$$

Pruebe que la solución de la ecuación diferencial

$$X'(t) = A(t)X(t) + X(t)B(t)$$

con $X(t_0) = X_0$ es igual a $R(t, t_0)X_0S(t, t_0)$.

- (2) Examine el caso particular $-B(t) \equiv A(t) \equiv u$, donde u es un elemento fijo de F .

- (3) Sea $(U, V) : I \longrightarrow F \times F$ una solución del sistema diferencial

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)X(t) + B(t)Y(t) \\ Y'(t) &= C(t)X(t) + D(t)Y(t). \end{cases}$$

Muestre que si $V(t) \in \text{Isom}(E; E)$ para todo $t \in I$ entonces

$$W(t) = U(t)[V(t)]^{-1}$$

es una solución de la ecuación de Ricatti:

$$Z'(t) = B(t) + A(t)Z(t) - Z(t)D(t) - Z(t)C(t)Z(t)$$

- (4) Dar un recíproco.