

CÁLCULO DIFERENCIAL Y DE VARIACIONES

PATRICIO FELMER & JUAN PEYPOUQUET

1. CLASE AUXILIAR III: 26 DE MARZO DE 2007.

1.1. **Inversión local.** Sea $\alpha \in [0, 1]$ el único punto fijo del coseno. Definimos el espacio:

$$X = \{ x \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbf{R}) \mid x(\alpha) = 0 \}$$

con la norma

$$\|x\|_X = \|x'\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |x'(t)|.$$

Consideremos la función

$$F : X \rightarrow X$$

definida mediante

$$F(x)(t) = \text{sen}(x(t)) + x(\cos(t)).$$

- (1) Demuestre que α está bien definido y que para cada $t \in [0, 1]$ se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos_n(t) = \alpha,$$

donde $\cos_0(t) = t$ y $\cos_{n+1}(t) = \cos(\cos_n(t))$.

- (2) Verifique que X es un espacio de Banach.
(3) Pruebe que F está bien definida y es de clase $\mathcal{C}^1$. Calcule $DF(x)$ para $x \in X$.
(4) Muestre que $DF(0)$ es invertible.
(5) Finalmente deduzca que existe una vecindad $\mathcal{V}$ del origen tal que para cada $y \in \mathcal{V}$ existe $x \in X$ con

$$\text{sen}(x(t)) + x(\cos(t)) = y(t)$$

en $[0, 1]$.