

CÁLCULO DIFERENCIAL Y DE VARIACIONES

FELIPE ÁLVAREZ & JUAN PEYPOUQUET

1. CLASE AUXILIAR I: 16 DE MARZO DE 2004.

1.1. Preliminares: Las Derivadas de Dini

Dada una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$, llamaremos **derivadas de Dini** de f en el punto x a los siguientes cuatro valores en $[-\infty, \infty]$:

$$\begin{aligned} D^+ f(x) &= \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} && \text{para } x \in [a, b), \\ D^- f(x) &= \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} && \text{para } x \in (a, b], \\ D_+ f(x) &= \underline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} && \text{para } x \in [a, b), \\ D_- f(x) &= \underline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} && \text{para } x \in (a, b]. \end{aligned}$$

1.2. Ejercicios:

- (1) Sea $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \text{ y} \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Calcule las derivadas de Dini de f en 0.

- (2) Demuestre que si una función f alcanza su máximo en el punto c , entonces $D^+ f(c) \leq 0$ y $D_- f(c) \geq 0$.
- (3) Demuestre que si f es continua en $[a, b]$ y una de sus derivadas de Dini, digamos D^+ , no toma valores negativos, entonces $f(b) \geq f(a)$.
- (4) Suponga que f es convexa en $[a, b]$. Demuestre que en cada punto las derivadas laterales existen. Más precisamente, para cada $x \in [a, b)$ se tiene que $D^+ f(x) = D_+ f(x) = f'_d(x) \in [-\infty, \infty)$ mientras para cada $x \in (a, b]$ tenemos $D^- f(x) = D_- f(x) = f'_i(x) \in (-\infty, \infty]$. Pruebe también que $f'_i(x) \leq f'_d(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

2. CLASE AUXILIAR II: 23 DE MARZO DE 2004.

2.1. Preliminares: Funciones a Valores Operadores

Sean X un espacio de Banach y $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ una función analítica con radio de convergencia R para su representación holomorfa $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Si $A \in \mathcal{L}(X)$ y $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < R$ entonces la sucesión $(f_n(A))_{n=0}^{\infty}$ definida por $f_n(A) = \sum_{k=0}^n a_k A^k$ es normalmente convergente en $\mathcal{L}(X)$ (y por lo tanto convergente pues $\mathcal{L}(X)$ es de Banach). Así podemos definir, por ejemplo:

- $\frac{I}{\lambda I - A}$, para $\lambda \in \mathbf{C}$ y $A \in \mathcal{L}(X)$ con $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < |\lambda|$; y
- $\exp(wA)$, para $w \in \mathbf{C}$ y $A \in \mathcal{L}(X)$.

2.2. Ejercicios:

2.2.1. Inversión de Isomorfismos. Dados X e Y espacios de Banach, definimos el conjunto $D := \text{Isom}(X; Y) \subset \mathcal{L}(X; Y)$ y la función $\varphi : D \longrightarrow \mathcal{L}(Y; X)$ por $\varphi(u) = u^{-1}$.

- (1) Pruebe que D es un abierto de $\mathcal{L}(X; Y)$.
- (2) Pruebe que la función φ es continua.
- (3) Pruebe que la función φ es diferenciable y que su derivada en un punto $u \in D$ viene dada por:

$$\varphi'(u)h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1} \quad \text{para } h \in \mathcal{L}(X; Y).$$

- (4) Pruebe que la función φ es de clase C^1 .

2.2.2. El Grupo Exponencial. Sean X un espacio de Banach y $A \in \mathcal{L}(X)$. Definimos la función $\psi : \mathbf{R} \times X \longrightarrow X$ por $\psi(t, x) = \exp(tA)x$.

- (1) Calcule las derivadas parciales de ψ .
- (2) Demuestre que son continuas.
- (3) Deduzca que ψ es diferenciable en $\mathbf{R} \times X$ y calcule su derivada.

3. CLASE AUXILIAR III: 30 DE MARZO DE 2004.

3.1. Operador de Traslación. Sea E_0 el espacio de las funciones acotadas y uniformemente continuas de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ con la norma del supremo.

- (1) Definimos la función $S : \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{L}(E_0)$ por $[S(t)f](x) = f(x+t)$. Demuestre que S satisface:

- $S(t+s) = S(t)S(s)$ para todos $t, s \in \mathbf{R}$,
- $S(0) = I$ y
- $\lim_{t \rightarrow 0} S(t)f = f$ para toda $f \in E_0$.

(Las funciones que tienen esas propiedades se denominan **Grupos Fuertemente Continuos** y aparecen con frecuencia en el estudio de Problemas de Evolución.)

- (2) Sea $E_1 := \{f \in E_0 \mid f' \in E_0\}$. Seleccionemos $g \in E_1$ y definamos la función $G : \mathbf{R} \longrightarrow E_1$ por $G(t) = S(t)g$.

- (a) Demuestre que G es continua en $\mathbf{R}$.
 (b) Sea $A : E_1 \longrightarrow E_0$ el operador definido por $Af = f'$. Pruebe que G es de clase $\mathbf{C}^1$ y

$$DG(t) \cdot 1 = AS(t)g = S(t)Ag.$$

- (3) Sea $E_2 := \{f \in E_1 \mid f'' \in E_0\}$.

- (a) Pruebe que si $g \in E_2$ entonces

$$S(t)g - g = tAg + \int_0^t (t-s)S(s)A^2g \, ds.$$

- (b) Para $g \in E_2$, demuestre la Desigualdad de Landau:

$$\|g'\|_\infty^2 \leq 4\|g\|_\infty\|g''\|_\infty.$$

4. CLASE AUXILIAR IV: 6 DE ABRIL DE 2004.

4.1. Teorema de Inversión Local: ¹

Consideremos los espacios:

- $\mathcal{A} := \mathcal{C}^0([0, 1]; \mathbf{R})$ con la norma del supremo; y
- $\mathcal{B} := \mathcal{C}_{00}^2 = \{y \in \mathcal{C}^2([0, 1]; \mathbf{R}) \mid y(0) = y(1) = 0\}$ con la norma

$$[y] = |y'(0)| + \|y''\|_{\infty}.$$

Definamos la función

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A} \\ y & \longrightarrow & -y'' + y^3 \end{array}$$

- (1) Verifique que $[\cdot]$ es una norma en $\mathcal{B}$, compárela con la norma del supremo y demuestre que $(\mathcal{B}, [\cdot])$ es un espacio de Banach.
- (2) Demuestre que f es de clase $\mathcal{C}^1$ y calcule $Df(y)$ para $y \in \mathcal{B}$.
- (3) Pruebe que $Df(0)$ es biyectiva.
- (4) Demuestre que existe $\epsilon > 0$ tal que si $g \in \mathcal{A}$ satisface $\|g\|_{\infty} < \epsilon$, entonces existe $z \in \mathcal{B}$ tal que $g = -z'' + z^3$.

¹Control 1, año 2001

5. CLASE AUXILIAR V: 13 DE ABRIL DE 2004.

5.1. Bifurcaciones. Sean X e Y espacios de Banach y consideremos una función $F : \mathbf{R} \times X \longrightarrow Y$ de clase $\mathcal{C}^2$ con la propiedad de que $F(\lambda, 0) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbf{R}$.

En este caso, para cualquier λ , la ecuación

$$(1) \quad F(\lambda, u) = 0, \quad u \in X$$

admite, al menos, la solución trivial $u = 0$.

Denotemos por $\mathcal{S}$ el conjunto de las soluciones no triviales de la ecuación (1); es decir, $\mathcal{S} := \{(\lambda, u) \mid u \neq 0 \text{ y } F(\lambda, u) = 0\}$.

Definición: Se dice que $\bar{\lambda}$ es un *punto de bifurcación* de la ecuación (1) si para toda vecindad $\mathcal{V}$ de $(\bar{\lambda}, 0)$, se cumple que $\mathcal{V} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$.

- (1) Demuestre que si $\bar{\lambda}$ es un punto de bifurcación de la ecuación (1), entonces la derivada parcial $F_u(\bar{\lambda}, 0)$ no es un operador invertible.
- (2) Enuncie el resultado anterior para el caso particular en que $X = Y$ y $F(\lambda, u) = \lambda u - G(u)$.
- (3) El recíproco, en general, no es cierto. Considere $X = Y = \mathbf{R}^2$, $G(x, y) = (x + y^3, y - x^3)$ y $F(\lambda, y) = \lambda(x, y) - G(x, y)$.

5.1.1. Derivada Segunda del Grupo Exponencial. Sean X un espacio de Banach y $A \in \mathcal{L}(X)$. Definimos la función $\psi : \mathbf{R} \times X \longrightarrow X$ por $\psi(t, x) = \exp(tA)x$.

En la Clase Auxiliar II vimos que ψ es de clase $\mathcal{C}^1$ y que su derivada en un punto $(t, x) \in \mathbf{R} \times X$ viene dada por:

$$[D\psi(t, x)](s, y) = sA \exp(tA)x + \exp(tA)y \quad \text{para } (s, y) \in \mathbf{R} \times X.$$

Demuestre que ψ es dos veces diferenciable en $\mathbf{R} \times X$ y calcule su derivada segunda.

6. CLASE AUXILIAR VI: 20 DE ABRIL DE 2004.

6.1. Más sobre Derivadas de Orden Superior y Funcionales Integrales: ²

Sean $X := \mathbf{C}^1([0, 1]; \mathbf{R})$ y $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ una función continua. Considere el funcional $J : X \longrightarrow \mathbf{R}$ definido por

$$J(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x'(t)|^2 dt + \int_0^1 F(t, x(t)) dt$$

- (1) Suponiendo que F es de clase $\mathbf{C}^2$, demuestre que J es dos veces diferenciable y calcule $D^2J(x)$ para $x \in X$.

- (2) Sea $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ una función continua. Tomemos $F(t, s) = \int_0^s f(t, r) dr$ en la definición de J . Suponga que existe $\bar{x} \in X$ tal que $DJ(\bar{x}) = 0$. Demuestre que $\bar{x}$ es solución del problema de condiciones de borde:

$$x''(t) = f(t, x(t)), \quad \text{para } t \in [0, 1]$$

$$x'(0) = x'(1) = 0.$$

²Control 1, año 2003

7. CLASE AUXILIAR VII: 11 DE MAYO DE 2004.

7.1. Soluciones Aproximadas: En esta clase y la próxima estudiaremos la existencia y unicidad de solución para una ecuación diferencial desde una perspectiva distinta.

Sean E un espacio de Banach, U un abierto de $\mathbf{R} \times E$ y $f : U \longrightarrow E$ una función continua. Consideremos la ecuación diferencial

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

Sean $\varepsilon > 0$, I un intervalo y $\varphi : I \longrightarrow E$ una función de clase $\mathbf{C}^1$ a trozos. Se dice que φ es una **solución ε -aproximada** de la ecuación (2) si:

- i) $(t, \varphi(t)) \in U$ para todo $t \in I$.
- ii) $\|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))\| \leq \varepsilon$ para todo $t \in I$.

Nota: En los puntos donde φ no sea diferenciable, entenderemos que la desigualdad en ii) vale para la derivada por la izquierda o por la derecha según corresponda.

Teorema: Sean I un intervalo compacto, $t_0 \in I$, $x_0 \in E$, y $r > 0$. Supongamos que $f : I \times \overline{B}(x_0, r) \longrightarrow E$ es una función continua que satisface

$$\|f(t, x)\| \leq M < \infty \quad \text{para todo } (t, x) \in I \times \overline{B}(x_0, r).$$

Consideremos el segmento

$$J = I \cap \left[t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M} \right].$$

Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ la ecuación (2) posee una solución ε -aproximada $\varphi : J \longrightarrow \overline{B}(x_0, r)$ que es lineal-afín a trozos y satisface $\varphi(t_0) = x_0$.

8. CLASE AUXILIAR VIII: 18 DE MAYO DE 2004.

8.1. Soluciones Aproximadas: En esta clase veremos que la existencia de soluciones aproximadas permite asegurar la existencia de una solución exacta para la ecuación diferencial en el caso lipschitziano.

En lo que sigue, E un espacio de Banach, $U \subseteq \mathbf{R} \times E$ y $f : U \longrightarrow E$ una función k -lipschitziana con respecto a la segunda variable. Consideremos la ecuación diferencial

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

Lema: Sea $u : [0, T] \longrightarrow [0, \infty)$ una función continua. Si se tiene

$$u(t) \leq at + b \int_0^t u(\tau) d\tau \quad \text{para todo } t \in [0, T]$$

con $a, b > 0$, entonces también se cumple

$$u(t) \leq \frac{a}{b} [e^{bt} - 1] \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

Proposición: Sean $\varphi_1 : I \longrightarrow E$ una solución ε_1 -aproximada y $\varphi_2 : I \longrightarrow E$ una solución ε_2 -aproximada de la ecuación (3), respectivamente. Dado $t_0 \in I$ definimos $x_1 = \varphi_1(t_0)$ y $x_2 = \varphi_2(t_0)$. Entonces, para todo $t \in I$ se tiene

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq \|x_1 - x_2\| e^{k|t-t_0|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left[\frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k} \right].$$

Teorema: Supongamos que U es cerrado, I es compacto, $t_0 \in I$ y $(t_0, x_0) \in U$. Supongamos también que para todo $\varepsilon > 0$ la ecuación (3) admite una solución ε -aproximada φ de clase $\mathbf{C}^1$ a trozos, definida en I y que satisface $\varphi(t_0) = x_0$. Entonces existe en I una única solución exacta ψ de la ecuación (3) que satisface $\psi(t_0) = x_0$.

9. CLASE AUXILIAR IX: 1 DE JUNIO DE 2004.

9.1. Preliminares.

Definición 1.

Sea X un espacio de Banach. Una familia $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X, X)$ es un semigrupo uniparamétrico de operadores acotados (o simplemente semigrupo) si:

- i) $T(0) = I$.
- ii) $\forall s, t \geq 0, T(s+t) = T(s)T(t)$.

Si un semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ satisface además

- iii) $\|T(t) - I\| \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$,

decimos que es un semigrupo uniformemente continuo, o SUC para abreviar.

Definición 2.

Sea $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X, X)$ un SUC. El generador infinitesimal de $T(t)$ es el operador $A_T : D(A_T) \rightarrow X$, definido por:

$$D(A_T) = \left\{ x \in X \mid \exists \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \right\}, \text{ y}$$

$$A_T x = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} =: \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0}, \text{ para } x \in D(A_T).$$

Ejemplo.

En la Clase Auxiliar II vimos que dado $A \in \mathcal{L}(X, X)$, la familia $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ es un SUC cuyo generador infinitesimal es A con $D(A) = X$.

Veremos, entre otras cosas, que todo SUC es de la forma $T(t) = e^{tB}$ para algún $B \in \mathcal{L}(X, X)$.

9.2. Ejercicios.

- (1) $\forall t \geq 0, \|T(t+h) - T(t)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$
- (2) Si $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ es un SUC entonces $D(A_T) = X$ y $A_T \in \mathcal{L}(X, X).$
- (3) Sean $\{S_1(t)\}_{t \geq 0}$ y $\{S_2(t)\}_{t \geq 0}$ dos Semigrupos Uniformemente Continuos. Supongamos que

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{S_1(t) - I}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S_2(t) - I}{t}.$$

Entonces $S_1(t) = S_2(t), \forall t \geq 0.$

- (4) Cada operador acotado A es el generador infinitesimal de un único SUC, que es su exponencial. Para cada SUC $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ existe $w \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{wt}$ para todo $t \geq 0.$
- (5) La función $T : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$ que a cada $t \geq 0$ asigna el operador $T(t)$ es diferenciable y satisface

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) = T(t)A.$$

- (6) Dados $f_0 \in X$, $A \in \mathcal{L}(X, X)$ y $b : [0, \infty) \rightarrow X$ continua, el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + b(t), & \text{para } t > 0 \\ f(0) = f_0 \end{cases}$$

tiene una única solución y está dada por

$$x(t) = e^{tA}f_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s) ds.$$

Nota: La hipótesis iii) en la definición 1 se puede cambiar por

$$\text{iii')} \quad T(t)x - x \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.$$

En ese caso, se dice que el semigrupo es fuertemente continuo (definición análoga a la dada en la Clase Auxiliar III para grupos). El generador infinitesimal no necesariamente es acotado ni está definido en todo el espacio X , pero sigue valiendo la conclusión sobre la solución de la ecuación diferencial, cambiando la exponencial por el semigrupo correspondiente. Para más detalles sobre esto puede consultar el libro

- A. Pazy, "Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations", Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, New York, 1983

o el apunte "Introducción a la Teoría de Semigrupos" de la III Escuela de Verano DIM-MECESUP-CMM, de F. Álvarez y J. Peypouquet, que se encuentra en la página del curso.

10. CLASE AUXILIAR X: 29 DE JUNIO DE 2004.

10.1. Problemas Isoperimétricos de Cálculo de Variaciones. *Consideremos el problema*

$$\min_y \int_a^b y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \, dx$$

donde el mínimo se toma entre las funciones y que son suficientemente regulares y satisfacen también

$$\begin{cases} L &= C(y) := \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \, dx \\ y(a) &= A \\ y(b) &= B. \end{cases}.$$

No explicaremos los detalles físicos, pero la solución de este problema describe la forma que toma una cuerda que se sostiene en los extremos a y b a alturas A y B , respectivamente. Para simplificar, aquí supondremos que $a = 0$, $b = 1$ y $B = A$.