

CÁLCULO DIFERENCIAL Y DE VARIACIONES

PATRICIO FELMER & JUAN PEYPOUQUET

TAREA II

Para entregar en parejas (las mismas) el miércoles antes del control II.

Problema 1. Teorema de Hadamard-Levy.

En este problema se presenta una demostración alternativa del Teorema de Hadamard-Levy en dimensión finita. Queda entendido que debe resolverse sin suponer la validez de dicho teorema en el caso general.

Sea $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ tal que:

- i) $f(0) = 0$,
- ii) Para cada $x \in \mathbf{R}^n$, $Df(x)$ es un isomorfismo, y
- iii) Existe $k > 0$ tal que $\|Df(x)^{-1}\| \leq k$ para todo $x \in \mathbf{R}^n$.

La demostración se realizará en tres etapas:

- (1) Pruebe que dado $u \in \mathbf{R}^n$ las soluciones de la ecuación diferencial

$$x' = Df(x)^{-1}u$$

están definidas en todo $\mathbf{R}$.

- (2) Sea $\phi(t, u)$ la solución de la ecuación anterior tal que $\phi(0, u) = 0$. Encuentre la derivada de la función $f(\phi(t, u))$ y deduzca que $f(\phi(1, u)) = u$.
- (3) Demuestre que f es un difeomorfismo en $\mathbf{R}^n$.

Problema 2. Fórmula de Abel.

Sea $A : J \rightarrow M_{n \times n}(\mathbf{R})$ una función continua. Consideremos una solución $U(t)$ de la ecuación matricial

$$U'(t) = A(t)U(t).$$

Sea $R(t, \tau)$ la resolvente de dicha ecuación.

- (1) Demuestre que la función $w(t) = \det(R(t, \tau))$ satisface la ecuación

$$y'(t) = \text{tr}(A(t))y(t).$$

- (2) Defina $W(t) = \det(U(t))$ y pruebe que satisface la *Fórmula de Abel*:

$$W(t) = W(\tau) \exp \left\{ \int_{\tau}^t \text{tr}(A(s)) \, ds \right\}.$$

Problema 3. *Teorema de Liouville.*

Sean $M \subset \mathbf{R}^N$ un abierto, $K \subset M$ un compacto conexo y $f : M \rightarrow \mathbf{R}^N$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Denotamos por $\phi(t, x)$ la solución de la ecuación $u' = f(u)$ con condición inicial $u(0) = x$. Sean $a < 0 < b$ tales que $\phi(t, x)$ está definido para todo $t \in [a, b]$ y $x \in K$. Denotamos por $V(t)$ el volumen del conjunto $\phi(t, K)$.

- (1) Con ayuda de la Fórmula de Abel (Problema 2) probaremos que

$$V'(t) = \pm \int_{\phi(t, K)} \operatorname{div} f(x) \, dx_1 \dots dx_N.$$

Para ello,

- (a) Muestre que ϕ se puede extender a un abierto conexo W que contiene a K (con los mismos a y b).
- (b) Compruebe que para cada $t \in [a, b]$, la función $\phi(t, \cdot) : W \rightarrow \phi(t, W)$ es un difeomorfismo.
- (c) Verifique que el determinante de la matriz $D_2\phi(t, x)$ tiene el mismo signo para todo $(t, x) \in [a, b] \times W$. En adelante supondremos que es positivo.
- (d) Muestre que

$$V(t+s) = \int_{\phi(t, K)} \det(D_2\phi(s, x)) \, dx_1 \dots dx_N.$$

- (e) Derive la fórmula anterior para obtener

$$\frac{d}{ds} V(t+s) = \int_{\phi(t, K)} \operatorname{div} f(\phi(s, x)) \det(D_2\phi(s, x)) \, dx_1 \dots dx_N.$$

- (f) Concluya.

- (2) Aplicación: *El flujo de un sistema Hamiltoniano conserva el volumen.* Suponga que el Hamiltoniano H es de clase $\mathcal{C}^2$ y recuerde que el sistema Hamiltoniano viene dado por

$$(p', q') = (D_2H(p, q), -D_1H(p, q)).$$

Escriba el problema en el contexto de la parte anterior y concluya que el volumen del conjunto $\phi(t, K)$ es constante.

Problema 4. Supongamos que se cumplen las hipótesis del Teorema de Bifurcación con

$$F(\lambda, x) = L_0x + (\lambda - \lambda_0)L_1x + R(\lambda, x),$$

donde R es suficientemente diferenciable. Para $s \in (-\delta, \delta)$ tenemos que

$$F(\lambda(s), s(u_0 + \phi(s))) = 0.$$

- (1) Descomponga el espacio en $\langle L_1u_0 \rangle \oplus \operatorname{Im}(L_0)$ y use las proyecciones correspondientes para determinar $\lambda'(0)$ y $\phi'(0)$.
- (2) Sean $J = [0, 1]$, $E = \mathcal{C}(J; \mathbf{R})$ y $F : \mathbf{R} \times E \rightarrow E$ dado por $F(\lambda, x) = x - \lambda F_0x$, donde

$$(F_0x)(t) = \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}(t) \int_0^\pi \operatorname{sen}(\tau) [x(\tau) + x^2(\tau)] \, d\tau$$

para $t \in J$. Pruebe que hay bifurcación en $\lambda = 1$ y determine $\lambda'(0)$ y $\phi'(0)$.

Problema 5. Sea $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ una función continua y además T -periódica en su primera variable. Supongamos que $p : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ es una solución T -periódica de la ecuación

$$(1) \quad x'(t) = f(t, x(t), 0)$$

tal que la única solución de

$$\begin{cases} y'(t) &= \frac{\partial}{\partial x} f(t, p(t), 0)y(t) \\ y(T) &= y(0) \end{cases}$$

es la función nula. Muestre que existen $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que si $\|\lambda\| < \delta$ entonces existe una solución p_λ de la ecuación

$$(2) \quad x'(t) = f(t, x(t), \lambda)$$

que es T -periódica en t y satisface $\|p_\lambda - p\|_\infty \leq \varepsilon$.

Indicación: Puede ser útil aplicar el Teorema de la Función Implícita.

Problema 6. *Demostración pendiente.*

En la demostración del teorema de diferenciabilidad de la solución de una ecuación diferencial ordinaria con respecto a la condición inicial, dejamos pendiente justificar una estimación. Defina

$$m(t, x) = X(t, \varphi(t, x)) - X(t, \varphi(t, \bar{x})) - D_x X(t, \varphi(t, \bar{x}))(\varphi(t, x) - \varphi(t, \bar{x})).$$

Demuestre que hay una constante K tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que si $\|x - \bar{x}\| \leq \delta$ entonces

$$\|m(t, x)\| \leq \varepsilon K \|x - \bar{x}\|$$

para todo $t \in I$. Use las hipótesis y contexto indicados en el enunciado del teorema.