CÁLCULO DIFERENCIAL Y DE VARIACIONES

PATRICIO FELMER & JUAN PEYPOUQUET

CLASE AUXILIAR VI: 23 DE ABRIL DE 2007.

1. Espacios estricta y uniformemente convexos. Un espacio de Banach X es *estrictamente convexo* si la bola unitaria es estrictamente convexa. Más precisamente, si $x, y \in X$ son puntos distintos tales que $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ y si $\alpha \in (0, 1)$, entonces $\|\alpha x + (1 - \alpha)y\| < 1$. Por otra parte, se dice que X es *uniformemente convexo* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos los $x, y \in X$ tales que $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ y $\|x + y\| \geq 2 - \delta$, se tiene que $\|x - y\| < \varepsilon$. Se puede probar que todo espacio uniformemente convexo es reflexivo. Los espacios de Hilbert y los L^p son ejemplos típicos de espacios uniformemente convexos.

- (1) Compruebe que si X es uniformemente convexo, es estrictamente convexo.
- (2) Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo y sea $\{x_n\}$ una sucesión en X . Demuestre que $x_n \rightarrow \hat{x}$ si, y sólo si, $x_n \rightharpoonup \hat{x}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|\hat{x}\|$.

2. El mapa de dualidad. Sea X un espacio de Banach. De acuerdo con el Teorema de Hahn-Banach, para cada $x \in X$ el conjunto

$$\mathcal{J}(x) = \{ f \in X^* \mid \|f\|_* = \|x\| \text{ y } \langle f, x \rangle = f(x) = \|x\|^2 \},$$

denominado *soporte* de x , es no-vacío. Si para cada x , el conjunto $\mathcal{J}(x)$ contiene sólo un elemento, $\mathcal{J}$ define una función que se llama *mapa de dualidad*. Demuestre lo siguiente:

- (1) Si X^* es estrictamente convexo el conjunto $\mathcal{J}(x)$ tiene un sólo elemento para cada $x \in X$.
- (2) Si X^* es estrictamente convexo y reflexivo el mapa de dualidad es continuo *fuerte-débil*.
- (3) Si X^* es uniformemente convexo el mapa de dualidad es continuo *fuerte-fuerte*.

3. Diferenciabilidad de la norma. Definimos la función $\phi : X \rightarrow \mathbf{R}_+$ mediante $\phi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$.

- (1) Demuestre que para $x, y \in X$ se tiene que

$$\langle \mathcal{J}(x), y - x \rangle \leq \phi(y) - \phi(x) \leq \langle \mathcal{J}(y), y - x \rangle.$$

- (2) Deduzca que si X^* es estrictamente convexo y reflexivo entonces $\mathcal{J}$ es Gâteaux-diferenciable. Calcule la derivada.
- (3) Finalmente pruebe que si X^* es uniformemente convexo entonces $\mathcal{J}$ es Fréchet-diferenciable.¹

¹Observe que en los casos (2) y (3) la función $\|x\| = \sqrt{2\phi(x)}$ es diferenciable en $X \setminus \{0\}$.