

CÁLCULO DIFERENCIAL Y DE VARIACIONES

PATRICIO FELMER & JUAN PEYPOUQUET

1. CLASE AUXILIAR II: 19 DE MARZO DE 2007.

1.1. **Derivada de un funcional integral.** Suponga que tenemos una función

$$\begin{aligned} f &: [a, b] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n &\longrightarrow & \mathbf{R} \\ & (t, u, v) &\longrightarrow & f(t, u, v). \end{aligned}$$

tal que f , $\frac{\partial f}{\partial u}$ y $\frac{\partial f}{\partial v}$ son continuas. Definimos el funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &: \mathcal{A} &\longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x &\longrightarrow & \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) dt. \end{aligned}$$

Pruebe que \mathcal{G} es diferenciable y calcule su derivada.

1.2. **Derivada Segunda del Grupo Exponencial.** Sean X un espacio de Banach y $A \in \mathcal{L}(X)$. Definimos la función $\psi: \mathbf{R} \times X \rightarrow X$ por $\psi(t, x) = \exp(tA)x$.

En la Clase Auxiliar I vimos que ψ es de clase \mathcal{C}^1 y que su derivada en un punto $(t, x) \in \mathbf{R} \times X$ viene dada por:

$$[D\psi(t, x)](s, y) = sA \exp(tA)x + \exp(tA)y \quad \text{para } (s, y) \in \mathbf{R} \times X.$$

Demuestre que ψ es dos veces diferenciable en $\mathbf{R} \times X$ y calcule su derivada segunda.