CÁLCULO DIFERENCIAL Y DE VARIACIONES

PATRICIO FELMER & JUAN PEYPOUQUET

1. Clase Auxiliar I: 12 de marzo de 2007.

1.1. **Convergencia de funciones diferenciables.** Sean X e Y dos espacios de Banach y sea U un abierto convexo de X. Considere una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de U en Y con las siguientes propiedades:

(1) El límite $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ existe para algún $a \in U$;
(2) La sucesión de aplicaciones $f_n' : U \to \mathcal{L}(X;Y)$ converge uniformemente en U a una $g : U \to \mathcal{L}(X;Y)$.

Pruebe que la sucesión f_n converge uniformemente en todo subconjunto acotado de U a una función f. Pruebe también que f es diferenciable y que $f' = g$.

Nota: Para obtener el resultado anterior basta suponer que U sea conexo y que la sucesión f_n' converja uniformemente en cada bola contenida en U. Demuéstrelo.

1.2. **Funciones en espacios de operadores.** Sea $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ una función analítica con radio de convergencia R para su representación holomorfa $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Sea X un espacio de Banach. Si $A \in \mathcal{L}(X)$ y $||A||_{\mathcal{L}(X)} < R$ entonces la sucesión $(f_n(A))_{n=0}^{\infty}$ definida por $f_n(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k A^k$ es convergente en $\mathcal{L}(X)$. Así tiene sentido definir, por ejemplo:

- $\frac{I}{\lambda I - A}$, para $\lambda \in \mathbf{C}$ y $A \in \mathcal{L}(X)$ con $||A||_{\mathcal{L}(X)} < |\lambda|$; y
- $\exp(wA)$, para $w \in \mathbf{C}$ y $A \in \mathcal{L}(X)$.

1.2.1. **Inversión de Isomorfismos.** Sean X e Y dos espacios de Banach. Definamos el conjunto $D := \mathrm{Isom}(X;Y) \subset \mathcal{L}(X;Y)$ y consideremos la función $\varphi : D \to \mathcal{L}(Y;X)$ definida por $\varphi(u) = u^{-1}$.

(1) Pruebe que D es un abierto de $\mathcal{L}(X;Y)$ y que φ es continua.
(2) Demuestre que φ es diferenciable y que su derivada en un punto $u \in D$ viene dada por $\varphi'(u)h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$ para $h \in \mathcal{L}(X;Y)$.
(3) Finalmente, verifique que la función φ es de clase C^1.

1.2.2. **El Grupo Exponencial.** Sean X un espacio de Banach y $A \in \mathcal{L}(X)$. Definimos la función $\psi : \mathbf{R} \times X \longrightarrow X$ por $\psi(t,x) = \exp(tA)x$.

(1) Calcule las derivadas parciales de ψ.
(2) Demuestre que son continuas.
(3) Deduzca que ψ es diferenciable en $R \times X$ y calcule su derivada.