



Guía Modelamiento

1. Se desea enviar un producto desde **Puerto Montt** a **Castro**. Existen solo 3 empresas de transbordadores: **Cruz del Sur** y **Transmar**, que zarpan desde Pargua; y **Queilen**, que lo hace desde Chaiten. Hay un convenio con cada una de estas empresas de transporte, de modo que solo se tarifa por el exceso de carga (según una capacidad preestablecida por cada empresa de transporte).

Por otro lado, en la isla existen 4 puertos: **Ancud** y **Chacao**, a los cuales se puede llegar navegando desde *Pargua*; y **Quellon** y **Castro**, a los que se llega desde *Chaiten*.

Hay dos limitaciones importantes a considerar:

- No se puede acumular el producto en ninguna ciudad, es decir, todo lo que sale desde P. Montt debe llegar a Castro.
- Solo tenemos 10 millones de pesos para realizar este proyecto.

Se detallan a continuación los costos (en millones) del envío de t toneladas del producto,

Transporte Terrestre

	Pargua	Chaiten		Castro
Puerto Montt	$0,4t$	$0,6 + 0,1t$	Ancud	$0,9t$
			Chacao	$(t - 1)^2$
			Quellón	$0,2$

Transporte Marítimo

	Par-Anc	Par-Chac	Chai-Quell	Castro
Cruz d S.	$0,3t + 0,1$	$0,2t$		
Transmar	$0,3$	$0,2t + 0,2$		
Queilen			$0,1t$	$0,6t$

Recuerde que solo se tarifa cuando se usa un servicio y cuando hay exceso de carga (según la siguiente tabla)

Empresa	Capacidad
Cruz d Sur	3
Transmar	2.8
Queilen(Chaiten-Quellon)	2
Queilen(Chaiten-Castro)	0

Se pide:

- (I) Hacer un esquema de este problema. (hacer un dibujo)
- (II) Modelar el problema de maximizar el envío.

Indicaciones:

- Considere las variables $X_{OR,DES}$ (ORigen y DESTino).
- Para controlar el exceso, puede serle útil considerar la función $\max(0, x)$.

2. (con solución, gracias a Roberto Cortez)

En una cierta fábrica se ha detectado que la actual asignación de recursos humanos es ineficiente, por lo que se le ha encargado a usted la tarea de re-asignar el personal disponible.

En el proceso productivo hay tres tareas:

1. Mantenición y operación de máquinas.
2. Clasificación de los productos.
3. Embalaje de los productos.

Además, el personal disponible se clasifica en tres grupos:

1. Personas con capacitación y experiencia.
2. Personas con capacitación pero sin experiencia.
3. Personas sin capacitación ni experiencia.

Las cantidades de unidades del producto que una persona produce al mes están dadas por la siguiente tabla:

tarea \ grupo	grupo 1	grupo 2	grupo 3
tarea 1	2.000	500	200
tarea 2	1.200	1.500	800
tarea 3	800	1.000	700

A una persona del grupo 1 se le pagan \$1.000, a una del grupo 2 \$700 y a una del grupo 3 \$350 (al mes, dinero medido en miles de pesos). Además usted dispone de 20 personas del grupo 1, 50 del grupo 2 y 80 del grupo 3 y se le ha dado un presupuesto mensual de \$75.000 (también medido en miles de pesos). Por último, en cada tarea la producción no puede ser inferior a 40.000 unidades al mes, pues si no se detiene la cadena productiva.

Plantee el problema como uno de optimización en que se busca maximizar la producción.

Solución

Las variables de decisión son los números de personas de cada grupo asignadas a cada tarea, es decir:

x_{ij} = número de personas del grupo i asignadas a la tarea j

La suma de todas las personas asignadas de un mismo grupo no debe ser mayor que la can-

tividad de gente disponible de dicho grupo, es decir:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^3 x_{1j} &\leq 20 \\ \sum_{j=1}^3 x_{2j} &\leq 50 \\ \sum_{j=1}^3 x_{3j} &\leq 80\end{aligned}$$

La suma de todas las personas asignadas de todos los grupos, ponderadas por su respectivo sueldo, no debe sobrepasar el presupuesto disponible, es decir:

$$1,000 \sum_{j=1}^3 x_{1j} + 700 \sum_{j=1}^3 x_{2j} + 350 \sum_{j=1}^3 x_{3j} \leq 75,000$$

La suma por tarea de las personas asignadas, ponderadas por su respectiva productividad, debe ser mayor a 40.000, que es la producción mínima para que no se detenga la cadena productiva, es decir:

$$\begin{aligned}2,000x_{11} + 500x_{21} + 200x_{31} &\geq 40,000 \\ 1,200x_{12} + 1,500x_{22} + 800x_{32} &\geq 40,000 \\ 800x_{13} + 1,000x_{23} + 700x_{33} &\geq 40,000\end{aligned}$$

No olvidemos imponer positividad de las variables:

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3$$

La función a maximizar es la suma de las personas en cada grupo y en cada tarea, ponderada por la productividad del segmento respectivo, es decir:

$$2,000x_{11} + 500x_{21} + 200x_{31} + 1,200x_{12} + 1,500x_{22} + 800x_{32} + 800x_{13} + 1,000x_{23} + 700x_{33}$$

Finalmente, escribamos el problema de la forma $\max c^t x$ s.a. $Ax \leq b$, para lo cual basta reconocer c, A, b y x .

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2,000 \\ 1,200 \\ 800 \\ 500 \\ 1,500 \\ 1,000 \\ 200 \\ 800 \\ 700 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 80 \\ 75,000 \\ -40,000 \\ -40,000 \\ -40,000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ & 1,000 & 1,000 & 1,000 & 700 & 700 & 700 & 1 & 1 & 1 \\ -2,000 & & -1,200 & & -500 & -1,500 & -200 & & -800 & \\ & -1 & & -800 & & -1,000 & & & -700 & \\ & & -1 & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

3. (con solución) Un comerciante debe trasladar en su camioneta tres productos (A,B,C) desde la casa matriz de su negocio hacia una sucursal de venta para satisfacer necesidades mínimas de stock. Como el fue alumno de Optimización, sabe que puede hacerlo de manera óptima respecto al gasto de combustible.

El sabe que el gasto de combustible es directamente proporcional a la carga que tenga la camioneta, pero el comerciante no tienen ninguna balanza, por lo que decide considerar las densidades indicadas en la etiqueta de las cajas.

Al momento de cargar se da cuenta que la camioneta puede alcanzar su capacidad máxima de 100 m^3 .

Como los productos A y B son sustitutos, se necesita al menos 60 unidades entre los dos para la venta en la sucursal.

Además el gobierno restringe viajes de productos orgánicos, por lo que el factor total de productos de esa naturaleza debe ser de 20.

En la Tabla se indica la densidad de los productos, y el número de unidades y el factor de elementos orgánicos que vienen en una caja de 1 m^3 de cada producto.

	Producto A	Producto B	Producto C
Densidades $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	3	9	12
Unidades por caja $\frac{\text{un}}{\text{m}^3}$	2	3	4
Factor Prod Orgánicos $\frac{\text{f.p.o.}}{\text{m}^3}$	0	1	4

Plantee el problema como uno de Optimización Lineal. (*Este problema lo puede resolver posteriormente con Simplex FASE I y II*)

Solución

Puesto que lo que queremos es minimizar el consumo de bencina, y este es directamente proporcional con el peso, el problema del comerciante es minimizar el peso total, dado por $3x_1 + 9x_2 + 12x_3$.

Para respetar la capacidad de la camioneta se debe cumplir que $x_1 + x_2 + x_3 \leq 100$.

Para satisfacer las necesidades de la sucursal se debe tener que $2x_1 + 3x_2 \geq 60$.

Para cumplir con la norma del gobierno se debe cumplir que $x_2 + 4x_3 = 20$.

El problema se escribe de la siguiente forma:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \min & 3x_1 + 9x_2 + 12x_3 \\ \text{s.a.} & \\ x_1 + x_2 + x_3 & \leq 100 \\ 2x_1 + 3x_2 & \geq 60 \\ x_2 + 4x_3 & = 20 \\ x_i & \geq 0 \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

y escrito con variables de holgura queda: *esto es para usar Simplex*

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \min & 3x_1 + 9x_2 + 12x_3 \\ \text{s.a.} & \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 100 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_5 & = 60 \\ x_2 + 4x_3 & = 20 \\ x_i & \geq 0 \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

4. Se le asignado un monto de \$10,000,000 para invertirlos en distintos instrumentos bancarios.

Como posibles instrumentos consideramos 2 tipos de inversiones en renta variable, fondos mutuos y acciones, los cuales rentan un 4 % y 5 % anualmente, respectivamente, y 1 tipo de inversión en renta fija, el cual renta un 3 %.

Para evitar perdidas inesperadas, causadas por los vaivenes del mercado, se le pide invertir en renta fija al menos un 20 % del total invertido en renta variable.

Modele el problema de maximizar las ganancias asociadas a la inversión descrita anteriormente, mediante programacin lineal (se puede resolver usando Simplex).

5. El ministerio de minera y energía desea realizar un estudio sobre la demanda elctrica de la zona central del país, este tiene por fin el satisfacer las demandas de ese sector al menor costo posible.

Para esto, debe considerar las 4 plantas hidroelctricas ya existentes, llamadas en lo que sigue P1, P2, P3 y P4, las cuales distribuyen directamente electricidad a las ciudades de Santiago, Valparaso, Via del Mar y Rancagua. La informacin con que se cuenta se resume en la siguiente tabla:

	Ciudades	Santiago	Via del Mar	Valparaso	Rancagua
Planta	Oferta\Demanda	5	3	2	1
P1	2	2	1	-	-
P2	3	1	3	2	-
P3	2	2	-	4	3
P4	4	4	3	2	1

donde los valores indicados entre una planta y una ciudad dada corresponden a los costos por un millón de Kilowatts/hora transportados (\$/MkWh), mientras que las ofertas y demandas dadas se encuentran en millones de Kilowatts/hora (MkWh).

Modele el problema anterior como un problema de transporte (no olvidar este problema para el capítulo que viene, mas o menos control 2).

6. El suministro de gas en Sudamérica es muy complejo, debido a algunos problemas políticos que existen entre los países del cono sur, y por el déficit que tendrá Argentina en los años venideros. Por esto, nuestro país le ha encargado realizar una propuesta para satisfacer nuestra demanda gaseífera, al menor costo posible.

Más precisamente, se le pide asignar la oferta (anual) Boliviana de 7 millones de metros cúbicos (Mm^3) para satisfacer la demanda de Chile y Argentina, que ascienden a 3 y 4 Mm^3 , respectivamente. Perú, el cuarto país implicado, produce lo justo para satisfacer su demanda interna, por lo que para nuestros efectos se considera como un “nodo de paso” (i.e. sin oferta ni demanda). Por razones políticas, no hay posibilidad de enviar gas directamente desde Bolivia a Chile, pero si a través de Argentina o Perú.

Finalmente, los costos (\$/ Mm^3) y las cotas, inferiores y superiores (Mm^3), asociados al transporte del gas entre los distintos países se entregan en la siguiente tabla:

Desde\hacia	Perú	Argentina	Chile
Bolivia	(3,1,10)	(10,0,7)	-
Perú	-	(2,4,10)	(6,0,5)
Argentina	-	-	(3,1,2)

Modele el problema anterior como un problema de flujo factible a costo mínimo. (minimizar el costo, cumpliendo con las restricciones). (Tampoco olviden este problema para el capítulo que viene, mas o menos control 2)

7. Considere una fábrica con tres tipos de máquinas: A, B y C, que pueden producir cuatro productos: 1, 2, 3 y 4. Cada producto debe pasar por alguna operación en cada uno de los tres tipos de máquina. Suponga que la producción es continua (i.e. se puede producir una cantidad no necesariamente entera de productos) y que cada producto debe pasar primero por una máquina A, luego por una B y finalmente por una C. Suponga además que el tiempo requerido para ajustar las máquinas al cambiar de producto es despreciable. La tabla siguiente muestra: **1.-** Las horas requeridas en cada tipo de máquina por unidad de cada producto, **2.-** El tiempo total disponible por semana por máquina y **3.-** La ganancia por la venta de una unidad de cada producto.

Tipo de Máquina	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4	Tiempo Total disponible por semana
A	1.5	1	2.4	1	2000
B	1	5	1	3.5	8000
C	1.5	3	3.5	1	5000
Ganancia por unidad	5.24	7.30	8.34	4.18	

Se desea determinar la producción semanal de cada producto que maximiza las ganancias. Plantee el problema como un problema de programación lineal.

8. Una fábrica tiene tres bodegas: B_1 , B_2 y B_3 , donde tiene almacenadas b_1 , b_2 y b_3 sillas respectivamente. Se tienen además cuatro puntos de venta: V_1 , V_2 , V_3 y V_4 , donde se requieren v_1 , v_2 , v_3 y v_4 sillas respectivamente. Suponga que es posible enviar sillas desde cualquier bodega a cualquier punto de venta. Considere que el costo de llevar una silla de la bodega B_i al punto de venta V_j es c_{ij} . Se desea satisfacer las demandas minimizando el costo de transporte. Plantee este problema como un problema de programación lineal, haciendo las suposiciones que crea necesarias.

Suponga que por problemas con el sindicato de camioneros, no se puede llevar más que d_{ij} sillas desde B_i hasta V_j . Agregue las restricciones correspondientes para incorporar esta situación al planteamiento del problema anterior, y deduzca en qué país está la fábrica.

9. Suponga que el productor de un artículo en particular conoce o es capaz de estimar la demanda de su producto para los próximos n meses. Se desea programar la construcción a lo largo de dichos n meses de modo de minimizar los costos variables totales. Asumiremos que el producto puede ser almacenado durante estos n meses. Habrá un costo asociado a mantener una unidad de producción en inventario durante un mes.

En algunas circunstancias, la sobreproducción puede ser provechosa, y en otras debe ser evitada. Por ejemplo, podría ser que si se programa la producción para satisfacer exactamente la demanda durante algunos meses, se necesitaría mucha sobreproducción en ciertos meses de demanda especialmente alta. Por otro lado, ciertas cantidades de producto se pueden producir y almacenar en producción normal durante meses de baja demanda, para ser almacenados hasta que la demanda exceda la producción. En otros casos podría ser mejor sobreproducir en ciertos meses e ir almacenando, incluso con una demanda baja, porque el costo de producción puede ser menor durante dichos meses, tal vez por cambios de precios de la materia prima por temporadas u otras razones. El problema está en programar la producción de modo de balancear los costos de almacenaje contra los costos de sobreproducción (horas extra, máquinas, etc), para minimizar el costo variable total.

Plantee el problema como uno de programación lineal. Considere para estos efectos c_i el costo de producir una unidad en el mes i en jornada normal, el costo d_i de producir una unidad en el mes i en jornada extraordinaria, y el costo f_i de almacenar una unidad durante el mes i . Se tiene además como datos a_i , la capacidad de producción en jornada ordinaria en el mes i , a'_i , la capacidad de sobreproducción en el mes i , y b_j la cantidad de unidades requeridas en el mes j . El programa lineal debe determinar la producción que minimize la suma de costos de producción y almacenamiento. (HINT: Considere como variables x_{ij} , el número de unidades producidas en jornada ordinaria en el mes i y vendidas en el mes j , e y_{ij} , el número de unidades producidas en jornada extraordinaria en el mes i y vendidas en el mes j)

10. Escriba un modelo de **programación lineal** para determinar una dieta que contenga al menos 0.5 % de calcio pero no más de 1.2 % del mismo, al menos 22 % de proteínas y al menos 5 % de fibra cruda. Los ingredientes son caliza, maíz y soya y los aportes (en Kg.), por cada Kg. de ingrediente son:

Ingrediente	Calcio	Proteínas	Fibra
Caliza	0.35	0	0
Maíz	0.001	0.09	0.02
Soya	0.002	0.5	0.08

Existen dos escenarios posibles para los costos (\$/Kg)

	Caliza	Maíz	Soya
Escenario A	0.016	0.046	0.125
Escenario B	0.018	0.045	0.126

Se debe minimizar el costo por Kg, en el caso más desfavorable.

11. Escriba un modelo de P.L. para el siguiente problema. La National Free Transportation Agency (NAFTA), debe decidir un programa de formación y contratación de nuevas azafatas para los próximos seis meses.

Las exigencias a respetar son expresadas en horas de vuelo de azafatas: 8.000 en enero, 9.000 en febrero, 8.000 en marzo, 10.000 en abril, 9.000 en mayo y 12.000 en junio.

La formación de una nueva azafata dura un mes. Esta formación comprende 100 horas de vuelo en líneas de la compañía. Estas 100 horas se pueden deducir de exigencias que las azafatas deben cumplir, es decir, sirven para satisfacer las exigencias de horas de vuelo de azafatas de la compañía.

Cada azafata experimentada puede entregar hasta 150 horas de vuelo por mes. La compañía dispone de 60 azafatas experimentadas al 1 de enero.

Cada azafata experimentada recibe un sueldo de US\$800 por mes, independientemente del número de horas que preste servicio. Cada mes, el 10 % de las azafatas experimentadas deja su trabajo por diversas razones.

Al cabo de un mes de formación, que cuesta US\$400 a la compañía, una azafata aprendiz se convierte en azafata experimentada.

12. Escriba un modelo de P.L. para el siguiente problema. Un granjero posee 100 hectáreas (ha.) que pueden ser utilizadas para el cultivo de trigo y maíz. El rendimiento por ha. es de 60 quintales anuales de trigo y de 95 quintales de maíz.

Cualquier fracción de las 100 ha. puede ser destinada al cultivo de trigo o maíz. El trabajo necesario es de 4 hrs. por ha. anuales, más 0.15 hr. por quintal de trigo y 0.70 hr. por quintal de maíz. El costo de las semillas y abono es de \$20 por quintal de trigo y \$12 por quintal de maíz.

El granjero puede vender su trigo a \$175 el quintal y su maíz a \$95 el quintal. A la compra, le costarían respectivamente \$250 y \$150. Puede también criar cerdos y pollos. Los vende cuando han alcanzado la edad de 12 meses. Un cerdo se vende a \$4.000. Un ave se vende en términos de *cerdo-equivalente* (el número de pollos necesarios para obtener \$4.000 al momento de la venta).

Un cerdo requiere 25 quintales de trigo o 20 quintales de maíz, así como 25 hrs. de trabajo y 25 m^2 de terreno. Un cerdo-equivalente de pollos requiere 25 quintales de maíz o 10 quintales de trigo, así como 40 hrs. de trabajo y 15 m^2 de terreno.

El granjero dispone de 10.000 m^2 de terreno para la crianza. Dispone también de 2.000 hrs. de trabajo anuales y puede poner a su familia a trabajar, disponiendo así de 2.000 hrs. suplementarias. Puede también contratar horas suplementarias de obreros agrícolas al costo de \$150 la hora.

Cada hora de obrero agrícola demanda 0.15 hr. de trabajo de supervisión de parte del granjero.

Determine las superficies a destinar al cultivo de trigo y/o maíz y las cantidades de cerdos y/o pollos a producir, de manera de maximizar el beneficio.

Explicite los supuestos usados en la modelación.

13. Una empresa de arriendo de autos, debe satisfacer la demanda de cuatro ciudades en un cierto día:

Ciudad	Autos demandados
A	2
B	3
C	5
D	7

La empresa tiene 3 garages donde guarda sus 18 autos:

Garage	Autos disponibles
1	6
2	2
3	10

Las distancias entre los garages y las ciudades están dadas por la tabla:

Gar. \ Ciu.	A	B	C	D
1	7	11	3	2
2	1	6	0	1
3	9	15	8	5

Encuentre una asignación de los automóviles a las diferentes ciudades, de manera de minimizar la distancia total recorrida.

14. Un computador servidor (S) debe transferir 50 archivos a otro remoto (R), por medio de tres computadores intermedios (1), (2) y (3), cuyos costos de transmisión unitarios y capacidades máximas están dadas por la tabla siguiente:

Arco	($S,1$)	($S,2$)	($S,3$)	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(1, R)	(2, R)	(3, R)
Costo	1	2	3	5	1	6	8	5	4
Capac.	20	10	$+\infty$	10	50	50	$+\infty$	10	40

Plantee este problema como uno de programación lineal (y resuélvalo por un algoritmo adecuado).

15. Considere tres centros de oferta de un cierto producto, con ofertas respectivas de 5, 25 y 25 unidades, y tres centros de demanda, con demandas 10, 20 y 15 respectivamente.

Suponga que la matriz de costos unitarios es:

$$(c_{ij}) = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Plantee el problema como problema de transporte.

16. Suponga usted que juegan Colo-Colo y el grandioso equipo mágico **Universidad de Chile**. Como es inevitable en este tipo de compromisos, aparecen en el estadio los típicos garreros, que como todo el mundo sabe (*Por lo menos quien escribe esto y su novia lo saben*) son delincuentes y lumpen por excelencia (Los de Abajo en el fondo son niños buenos). Dada esta situación de inminente peligro a su seguridad personal, los vecinos del estadio aterrorizados ante esta horda de delincuentes organizan un encuentro con Carabineros a quienes les plantean su problema: "Necesitamos seguridad para el día del encuentro". Carabineros de Chile entonces se ve enfrentado al problema siguiente:

Minimizar el número de policías a la salida del estadio, considerando que cada cuadra debe ser vigilada desde una esquina. Para ello contratan los servicios de un profesor de optimización de cuyo nombre no me acuerdo ahora, pero de marcadas tendencias azules quien le entrega el problema a unos de sus ayudantes con nombre de instrumento musical y obsesión con el número trece (un romántico viajero también), el cual a su vez, confiando ciegamente en la pericia de los alumnos lo incluye en una guía de ejercicios propuestos. (Notar la coincidencia).

Indicación: Considerar el barrio aledaño al estadio como un grafo (A, N) en que los nodos son las esquinas y los arcos son las cuerdas en cuestión. ¿Cómo cambia el modelo si las esquinas tienen costo es decir, hay que pagar c_i por poner un policía en un nodo i y el número de policías está limitado por L ?

Nota: Lo de carabineros es una historia falsa para hacer más entretenido el cuento, lo que no quiere decir que el problema ande alejado de la realidad. Este problema se puede complicar más aún si consideramos que aparte de simples carabineros podemos contar con otro tipo de artefactos tales como guanacos, zorrillos, cucas, etc (que naturalmente tienen coberturas y costos distintos).

P.D. Esta guía ha sido confeccionada recopilando material de años anteriores. Agradecimientos a Hector Ramirez, Roberto Cortez y Charango. Los enunciados han sido escritos tal cual es el original, para preservar memorables preguntas.