Programación Lineal[1]

Prof. Jorge Amaya A.[2]

.
Abril de 2007

[1]Este es un texto destinado exclusivamente a los alumnos del curso MA37A-OPTIMIZACION, de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile.

[2]Departamento de Ingeniería Matemática y Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile. Se agradece enviar sus comentarios a: *jamaya@dim.uchile.cl*

Contents

1 Introducción y Ejemplos

Un problema de programación lineal se escribe de manera explícita como:

$$
\begin{array}{lrrcrrcl}
(PL) \quad \min z = & c_1x_1+ & c_2x_2+ & \dots & + & c_{n-1}x_{n-1}+ & c_nx_n & \\
& a_{1,1}x_1+ & a_{1,2}x_2+ & \dots & + & a_{1,n-1}x_{n-1}+ & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
& a_{2,1}x_1+ & a_{2,2}x_2+ & \dots & + & a_{2,n-1}x_{n-1}+ & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
& \vdots & \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
& a_{m,1}x_1+ & a_{m,2}x_2+ & \dots & + & a_{m,n-1}x_{n-1}+ & a_{m,n}x_n & = & b_m \\
& & & & & & x_i & \geq & 0 \quad \forall i
\end{array}
$$

o en forma compacta como:

$$
\begin{array}{rl}
(PL) \quad \min z & = c^T x \\
Ax & = b \\
x & \geq 0
\end{array}
$$

con $x, c \in I\!R^n,\ \ b \in I\!R^m,\ \ A \in \mathcal{M}_{m \times n}(I\!R)$, con $m \leq n$.

En la **función objetivo** o **criterio** $c^T x$, la variable x se conoce como **variable de decisión** o **nivel de actividad** y c como **vector de costos**.

El conjunto de restricciones $S = \{Ax = b, x \geq 0\}$ es un poliedro cerrado y se llama **conjunto factible**. La matriz A se conoce como la **matriz de coeficientes tecnológicos** y b como **vector de recursos** o, simplemente, **lado derecho**.

Otras definiciones preliminares:

- Si S es acotado, existe solución, pues se minimiza una función lineal continua sobre un conjunto compacto (cerrado y acotado).
- Si S es no acotado, puede ocurrir que $c^t x \to -\infty$, con $x \in S$.
- Se dirá que el problema (PL) es **acotado** si y solamente si $\exists \overline{x} \in S \quad c^t\overline{x} \leq c^t x \ \ \forall x \in S$.
- Se dirá que el problema (PL) es **no acotado** si y solamente si $\exists d \in I\!R^n, x_o \in S$ tal que $c^t(x_o + \lambda d) \to -\infty$ si $\lambda \to \infty$ con $x_o + \lambda d \in S \ \ \forall \lambda > 0$ Es evidente que si (PL) es no acotado, entonces S es no acotado. La otra implicancia no siempre es cierta, como veremos cuando estudiemos cómo resolver un programa lineal.
- Se dirá que el problema (PL) es infactible si y sólo si $S = \phi$.

1.1 Ejemplos

En lo que sigue, revisaremos algunos ejemplos clásicos de la programación lineal.

Ejemplo 1.1 *Problema de transporte*

Consideremos una industria que tiene dos fábricas, una en la ciudad O1 y otra en la ciudad O2. Ella produce un bien que es consumido en D1, D2 y D3. La oferta en O1 es de 10.000 unidades diarias, mientras que la oferta en O2 es de 5.000 unidades. La demanda diaria en todos los centros de consumo es de 5.000 unidades.

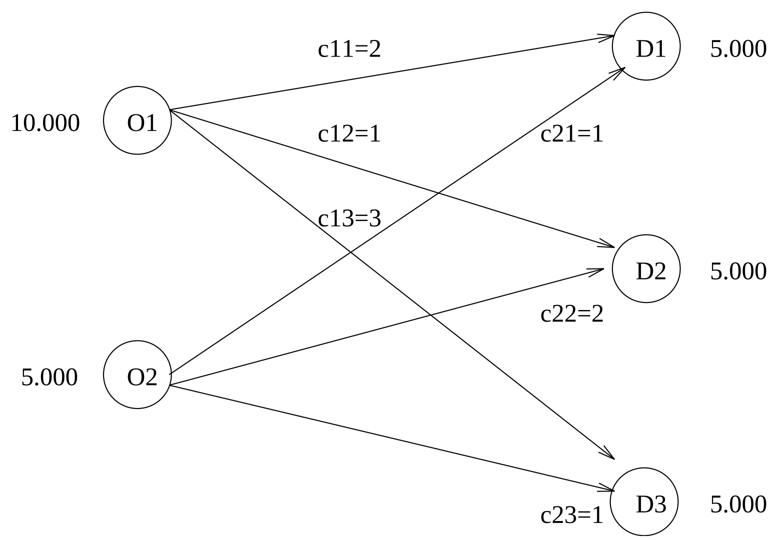

Figure 1: Problema de transporte: grafo de la red oferta-demanda

Los costos de transporte (peajes, impuestos, pago de camiones) están dados por el vector c, donde c_{ij} es el costo de transportar una unidad de producción desde la fábrica i a la ciudad j, con $c_{11} = 2, c_{12} = 1, c_{13} = 3, c_{21} = 1, c_{22} = 2, c_{23} = 1$.

El objetivo del industrial es determinar la cantidad de producto que debe enviar desde cada fábrica a cada centro de demanda, minimizando los costos de transporte.

Si llamamos x_{ij} a la cantidad de producto enviada desde la fábrica i a la ciudad j, el problema y sus restricciones pueden plantearse como sigue:

$$
\begin{array}{llcccccccl}
\text{(P)} & \min & 2x_{11} & +x_{12} & +3x_{13} & +x_{21} & +2x_{22} & +x_{23} & & \\
 & & & & & & & & & \\
\text{oferta} & \text{O1} & x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & & & & = & 10000 \\
 & \text{O2} & & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & = & 5000 \\
\text{demanda} & \text{D1} & x_{11} & & & +x_{21} & & & = & 5000 \\
 & \text{D2} & & x_{12} & & & +x_{22} & & = & 5000 \\
 & \text{D3} & & & x_{13} & & & +x_{23} & = & 5000 \\
 & & & & & & & x_{ij} & \geq & 0 \quad \forall i,j
\end{array}
$$

Equivalentemente,

(P) $\min\limits_{x} \sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{j=1}^{M} c_{ij}x_{ij}$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 10000 \\ 5000 \\ 5000 \\ 5000 \\ 5000 \end{bmatrix}
$$

$$x_{ij} \geq 0 \ \ \forall i, j$$

es decir, como un problema lineal, donde S (el poliedro) está escrito en la forma canónica $Ax = b, \ \ x \geq 0$.

En términos más generales, si a_i denota la oferta del nodo $i = 1, ..., N$ y b_j la demanda en el nodo $j = 1, ..., M$, el problema de transporte puede escribirse como sigue:

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{j=1}^{M} c_{ij}x_{ij} \\
\text{oferta} & \sum\limits_{j=1}^{M} x_{ij} = a_i \quad \forall i = 1, ..., N \\
\text{demanda} & \sum\limits_{i=1}^{N} x_{ij} = b_j \quad \forall j = 1, ..., M \\
 & \quad x_{ij} \geq 0 \qquad \forall i, j
\end{array}
$$

En general, supondremos que $\sum\limits_{i=1}^{N} a_i = \sum\limits_{j=1}^{M} b_j$, lo cual garantiza la factibilidad del problema.

Ejemplo 1.2 *Planificación de la producción*

Se necesita planificar la producción para k meses, con demandas conocidas al fin de cada mes $d_1, ..., d_k$.

El stock inicial es de $s_o \leq d_1$. Los costos de producción en cada período son $c_1, ..., c_k$. Se puede guardar producto de un mes a otro, con costos unitarios $q_1, ..., q_k$. Al final del horizonte de producción el stock debe ser nulo.

Se desea encontrar el plan de producción que minimize los costos totales de la empresa.

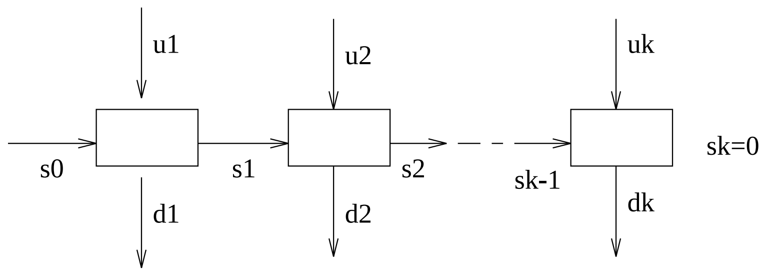

Figure 2: Problema de planificación de producción

Escribamos primero las restricciones del problema:

Llamando u_i a la producción del período $i = 1, ...k$, del diagrama de la figura (1.1) es claro que

$$
\begin{array}{rcl}
variables & & datos \\
u_1 - s_1 & = & d_1 - s_o \\
s_1 + u_2 - s_2 & = & d_2 \\
\vdots & & \vdots \\
s_{k-1} + u_k & = & d_k \\
u_i, s_i & \geq 0 & \forall i = 1, ..., k
\end{array}
$$

Luego, el problema puede escribirse como:

$\min \sum_{i=1}^{k} c_i u_i + \sum_{i=1}^{k-1} q_i s_i$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \text{-1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \text{-1} & & & \vdots \\
\vdots & & 1 & 0 & & 0 & 1 & \text{-1} & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & & \ddots & & & & 1 & \text{-1} \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{k-1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
d_1 - s_o \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_k
\end{bmatrix}
$$

$$u_i, s_i \geq 0 \; \forall i, j$$

Ejemplo 1.3 *Problema de la dieta*

Un hacendado está criando cerdos y necesita definir la cantidad de alimentos que hay que dar a cada uno diariamente, para satisfacer los requerimientos nutricionales mínimos, de modo de minimizar el costo por alimentación.

El Servicio Nacional de Alimentación de cerdos entrega a los empresarios del rubro la siguiente carta de nutrientes por Kg. de los alimentos más comunes:

Alimentos [Kg]	**Nutrientes**		
	carbohidratos	**proteínas**	**vitaminas**
maíz	90	30	10
cebada	20	80	20
alfalfa	40	60	60
Req. mínimo diario	200	180	150

El precio del maíz, la cebada y la alfalfa es de \$42, \$36 y \$30 por Kg., respectivamente.

Planteemos el problema de optimización asociado: llamemos $m \geq 0$ a la cantidad de maíz, $c \geq 0$ a la de cebada y $a \geq 0$ a la de alfalfa, todas medidas en Kg.

El objetivo del hacendado es minimizar sus costos por alimentación, esto es

$$\min 42m + 36c + 30a$$

Las restricciones nutricionales, de acuerdo a la tabla, están dadas por

$$
\begin{array}{ll}
90m + 20c + 40a \geq 200 & \text{carbohidratos} \\
30m + 80c + 60a \geq 180 & \text{proteínas} \\
10m + 20c + 60a \geq 150 & \text{vitaminas}
\end{array}
$$

Si llamamos $x = \begin{pmatrix} m \\ c \\ a \end{pmatrix}$ a la variable de decisión, $c = \begin{pmatrix} 42 \\ 36 \\ 30 \end{pmatrix}$ al vector de costos,

$A = \begin{pmatrix} 90 & 20 & 40 \\ 30 & 80 & 60 \\ 10 & 20 & 60 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a la matriz de coeficientes tecnológicos y

$b = \begin{pmatrix} 200 \\ 180 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ el vector de recursos,

el problema de la dieta puede escribirse como un problema de programación lineal con restricciones de desigualdad.

1.2 Formas canónicas de un programa lineal

En general un PL se encuentra en una de las dos siguientes formas:

1) Forma de desigualdad:

$$\begin{aligned} \max_{x} \quad & z = c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

2) Forma estándar:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & z = c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Estas dos formas son equivalentes puesto que se puede pasar de un problema de maximización a uno de minimización y viceversa con un simple cambio de signo, y los poliedros $\{x/Ax = b,\ x \geq 0\}$ y $\{x/Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ son equivalentes, en el sentido que están relacionados a través de un cambio reversible en las variables y restricciones. Específicamente, cualquier problema de programación lineal puede escribirse en una de estas dos formas, usando transformaciones sencillas, como por ejemplo:

- Pasar de $\geq$ a $\leq$ multiplicando la restricción por -1.
- Pasar de $\leq$ a $=$ usando una variable de holgura:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_j \quad \text{es equivalente a} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_j, \quad x_{n+1} \geq 0.$$

  Notar que en este caso se crea una variable adicional por cada restricción.

- Una variable irrestricta x puede ser reemplazada por dos variables no negativas $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$, escribiendo $x = x_1 - x_2$
- Maximizar $c^T x$ es equivalente a minimizar $-c^T x$

Ejemplo 1.4 *El problema*

$$\begin{array}{lrrcl} \max & c_1x_1+ & c_2x_2 & & \\ & x_1- & 3x_2 & \geq & 8 \\ & x_1 & & \geq & 0 \end{array}$$

es equivalente al problema (haciendo $x_2 = u - v$, con $u, v \geq 0$).

$$\begin{array}{lrrrcr} -\min & -c_1x_1- & c_2u+ & c_2v & & \\ & -x_1+ & 3u- & 3v & \leq & -8 \\ & x_1, & u, & v & \geq & 0 \end{array}$$

que a su vez, es equivalente al problema:

$$\begin{array}{lrrrrl} -\min & -c_1x_1- & c_2u+ & c_2v & & \\ & -x_1+ & 3u- & 3v & +y = & -8 \\ & x_1, & u, & v, & y \geq & 0 \end{array}$$

Plantear un problema de optimización requiere comprender la estructura del mismo y ser ordenado y creativo a la hora de darle forma. Veamos algunos ejemplos más de planteamiento de programas lineales.

Ejemplo 1.5 *Una constructora de viviendas de madera acaba de ganarse una propuesta para edificar un conjunto de casas. Los ingenieros de la constructora están preocupados de minimizar los costos tanto como sea posible. Ellos han estimado que requerirán madera aserrada de* 4×4 *de diferentes longitudes: de 80, 60 y 50 cm. En el mercado existe este producto en dos dimensiones: 1.20 y 2.10 m. con un costo de 300 y 350 pesos, respectivamente. La cantidad de piezas de cada largo, que se emplearán en la construcción, se indican en la siguiente tabla:*

Longitud (cm)	*Cantidad mínima requerida*
80	*1500*
60	*800*
50	*2400*

Para satisfacer sus necesidades, la empresa tiene que trozar los productos que compre para obtener las piezas deseadas. ¿Cuántos produactos de 1.20 m. y de 2.10 m.debe comprar la empresa para satisfacer sus requerimientos y minimizar los costos? Formule un modelo de programación lineal para resolver el problema.

Solución:

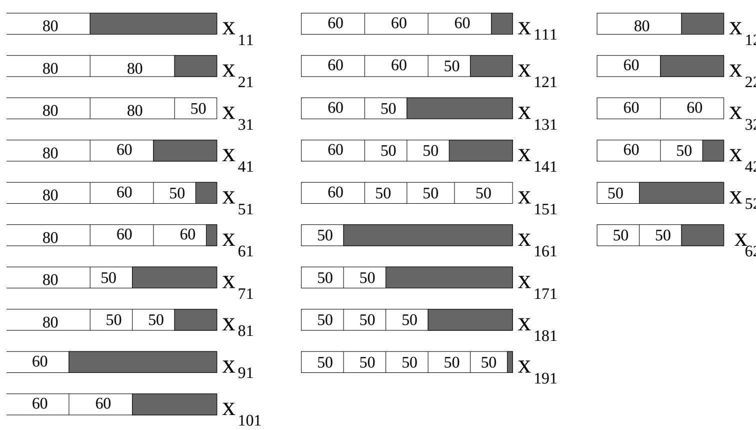

Figure 3: Posibles configuraciones de corte

El mercado ofrece madera aserrada en dos dimensiones

j	*dimensión*
1	1.20
2	2.10

con costos $c_1 = 300$ y $c_2 = 350$, y la empresa requiere 3 longitudes distintas: 80, 60 y 30 cm, en las cantidades señaladas en la tabla del enunciado.

Una placa 2.10 m. puede cortarse en 19 formas distintas (configuraciones), para satisfacer los requerimientos de la empresa. Por su parte, una placa de 1.20 m. puede cortarse en 6 configuraciones, tal como se indica en la figura (3).

Luego, el conjunto de variables de decisión natural será

x_{ij} = cantidad de madera de dimensión j, cortada de acuerdo a la configuaración i.

Con esto, la función objetivo se escribirá:

$$\min 300 \sum_{i=1}^{19} x_{i1} + 350 \sum_{i=1}^{6} x_{i2}$$

Las restricciones serán:

$$\begin{aligned}
x_{11} + 2x_{21} + 2x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} + x_{81} + x_{12} &\geq 1500 \\
x_{41} + x_{51} + 2x_{61} + x_{91} + 2x_{101} + 3x_{111} + 2x_{121} + x_{131} & \\
+x_{141} + x_{151} + x_{22} + 2x_{32} + x_{42} &\geq 800 \\
x_{31} + x_{51} + x_{71} + 2x_{81} + x_{121} + x_{131} + 2x_{141} + 3x_{151} & \\
+x_{161} + 2x_{171} + 3x_{181} + 4x_{191} + x_{42} + x_{52} + 2x_{62} &\geq 2400 \\
x_{ij} &\geq 0 \quad \forall i, j
\end{aligned}$$

Analicemos la primera restricción. En ella se impone que la cantidad de piezas de 80 cms. debe ser al menos de 1500. En efecto, la configuracion x_{11} tiene exactamente una pieza de 80 cms, la configuración x_{21} contiene 2 piezas de 80cms, etc.

Ejemplo 1.6 *Un pequeño banco asigna un máximo de \$20.000 para préstamos personales y para automóvil durante el mes siguiente. El banco cobra una tasa de interés anual del* 14% *a préstamos personales y del* 12% *a préstamos para automóvil. Ambos tipos de préstamos se saldan en períodos de 3 años. El monto de los préstamos para automóvil debe ser, cuando menos, dos veces mayor que el de los préstamos personales. La experiencia pasada ha demostrado que los adeudos no cubiertos constituyen el* 1% *de todos los préstamos personales. ¿Cómo deben asignarse los fondos?*

Solución:

Variables de decisión:

x_1 : dinero asignado a préstamos personales
x_2 : dinero asignado a préstamos para automóvil

Planteamiento:

$$
\begin{array}{rrrcl}
\max z = & (0,14 \cdot 0,99 - 0,01)x_1 & +0,12x_2 & & \\
 & x_1 & +x_2 & \leq & 20.000 \\
 & 2x_1 & -x_2 & \leq & 0 \\
 & x_1 & & \geq & 0 \\
 & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Donde maximizamos la cantidad total de intereses a recibir, menos la fracción de créditos personales que no se pagan. La primera restricción corresponde a la cantidad de dinero a repartir en créditos y la segunda dice que lo destinado a préstamos para automóviles debe ser al menos el doble que lo que se destina a préstamos personales. Esto podría obedecer a alguna política del banco para recuperar el dinero en caso de no pago, por ejemplo, embargando los vehículos.

Ejemplo 1.7 *Una empresa dedicada a la elaboración de trajes de seguridad para obreros forestales ha desarroallado dos nuevos tipos de trajes, que vende a tiendas en todo el país. Aunque la demanda por estos trajes excede a su capacidad de producción, la empresa sigue trabajando a un ritmo constante, limitando su trabajo en estos nuevos artículos a 50 horas/semana. El traje tipo I se produce en 3.5 horas y genera una ganacia de US\$28, mientras que el traje tipo II toma 4 horas para su producción y da una ganancia de US\$31. ¿Cuántos trajes de cada tipo deberá producir semanalmente la empresa, si su objetivo es maximizar su ganacia total?*

Solución:

Variables de decisión:
x_1 : número de trajes tipo I
x_2 : número de trajes tipo II

Planteamiento:

$$
\begin{array}{rrrcr}
(P) \max z = & 28x_1 & +31x_2 & & \\
 & 3.5x_1 & +4x_2 & \leq & 50 \\
 & x_1 & & \geq & 0 \\
 & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Ejemplo 1.8 *Suponga que una persona acaba de heredar \$6000 y desea invertirlos. Al oir esta noticia, dos amigos distintos le ofrecen la oportunidad de participar como socio en sus negocios. En ambos casos, la inversión significa dedicar un poco de tiempo el verano siguiente, al igual que invertir efectivo. Con el primer amigo, al convertirse en socio completo, tendría que invertir \$5000 y 4000 horas, con una ganacia estimada (ignorando el valor del tiempo) de \$4500. Las cifras correspondientes a la proposición del segundo amigo son \$4000 y 500 horas, con una ganacia estimada de \$4500. Sin embargo, ambos amigos son flexibles y le permitirán entrar al negocio con cualquier fracción de la sociedad. La participación de las utilidades sería proporcional a esa fracción. Como de todas maneras esta persona está buscando un trabajo interesante para el verano (600 horas a lo sumo), ha decidido participar en una o ambas sociedades, con la combinación que maximize la ganacia total estimada. Formule un modelo de programación lineal para este problema.*

Solución:

Variables de decisión:

x_1 : dinero invertido en el primer negocio

x_2 : dinero invertido en el segundo negocio

Planteamiento:

$$
\begin{array}{rrrcr}
(P)\max z = & \frac{9}{10}x_1 + & \frac{9}{8}x_2 & & \\
& x_1 & +x_2 & \leq & 6000 \\
& \frac{2}{25}x_1 & +\frac{1}{8}x_2 & \leq & 600 \\
& x_1 & & \leq & 5000 \\
& & x_2 & \leq & 4000 \\
& & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Plantee los siguientes problemas de programación lineal.

Ejercicio 1.1 *La National Free Transportation Agency (NAFTA), debe decidir un programa de formación y contratación de nuevas azafatas para los próximos seis meses.*

Las exigencias a respetar son expresadas en horas de vuelo de azafatas: 8.000 en enero, 9.000 en febrero, 8.000 en marzo, 10.000 en abril, 9.000 en mayo y 12.000 en junio.

La formación de una nueva azafata dura un mes. Esta formación comprende 100 horas de vuelo en líneas de la compañía. Estas 100 horas se pueden deducir de exigencias que las azafatas deben cumplir, es decir, sirven para satisfacer las exigencias de horas de vuelo de azafatas de la compañía.

Cada azafata <u>experimentada</u> puede entregar hasta 150 horas de vuelo por mes.

Cada azafata experimentada recibe un sueldo de US$800 por mes, independientemente del número de horas que preste servicio. Cada mes, el 10% de las azafatas experimentadas deja su trabajo por diversas razones.

Al cabo de un mes de formación, que cuesta US$400 a la compañía, una azafata aprendiz se convierte en azfata experimentada.

Ejercicio 1.2 *Un proyecto de construcción municipal requiere fondos de 2 millones, 4 millones, 8 millones y 5 millones, durante los próximos 4 años, respectivemente. Suponga que todo el dinero para un año se requiere al principio del año. El municipio intenta vender el número exacto de bonos a largo plazo, suficiente para cubrir los fondos requeridos para el proyecto, y todos estos bonos, independientemenet de cuándo sean vendidos, serán pagados (se vencerán) en la misma fecha de algún año futuro distante. Se ha estimado que los procentajes de interés en el mercado (es decir, los costos de vender los bonos) de bonos a largo plazo en los próximos 4 años serán del 7%, 6%, 6.5% y 7.5%, respectivemente. El pago de intereses de los bonos empezará un año después de haber completado el proyecto y continuará durante 20 años, después de lo cual los bonos serán pagados. Por otra parte, se ha estimado que durante el mismo período, los porcentajes de interés a corto plazo sobre los depósitos a tiempo fijo (es decir, lo que la ciudad puede ganar en depósitos) serán del 6%, 5.5% y 4.5%, respectivamente (es claro que el municipio no invertirá dinero en depósitos a corto plazo durante el cuarto año). Cuál es la estrategia óptima que debe seguir el gobierno municipal en la venta de bonos y en el depósito de fondos en cuentas a tiempo fijo para poder completar el proyecto de construcción?*

2 Solución de un Problema de Programación Lineal

Teorema 2.1 *Sea S un poliedro no vacío en la forma canónica y sea el problema*

$$
\begin{array}{ll}
(P)\min & c^T x \\
& x \in S
\end{array}
$$

Entonces una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

(i) (P) es no acotado.

(ii) (P) tiene un vértice (punto extremo) como solución.

2.1 Motivación: solución gráfica en $I\!R^2$

Consideremos el siguiente problema lineal

$$
\begin{array}{llrrcl}
(P) & \min & -2x_1 & +3x_2 & & \\
& & 2x_1 & -x_2 & \leq & 3 \\
& & -x_1 & +2x_2 & \leq & 2 \\
& & & x_2 & \geq & 1 \\
& & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Gráficamente, en un problema de minimización, lo que se hace es desplazar la recta que representa los costos en la dirección $-c$, que es la dirección de máximo descenso. Con esto tenemos que el valor óptimo será aquel último punto factible que alcance la función objetivo en su descenso.

Desgraciadamente, para dimensión mayor o igual a 3, ya no es posible resolver estos problemas de manera gráfica.

2.2 Algoritmo Simplex

Vimos que para poder resolver un problema de programación lineal necesitamos solo considerar los vértices del poliedro $S = \{x \in I\!R^n / Ax = b, x \geq 0\}$ como candidatos a solución óptima del problema. Para un número grande de variables (n) y restricciones (m) vimos también que el número de vértices puede ser enorme, $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$, por lo que una metodología más sistemática se hace necesaria.

El método simplex, desarrollado por Dantzig (1949), tiene una idea geométrica muy simple: primero encuentra una base factible (un vértice de S). Luego el método se mueve de vértice en vértice, a través de las aristas de S que sean direcciones de descenso para la función objetivo, generando una sucesión de vértices cuyos valores por $f(x) = c^T x$ son estrictamente decrecientes, con lo que se asegura que un mismo vértice no es visitado dos veces. Así, como el número de vértices es finito, el algoritmo converge en tiempo finito; esto significa que encuentra una solución óptima, o una arista a lo largo de la cual la función objetivo es no acotada.

A la búsqueda de una base factible se la llama Fase I del algoritmo simplex. El resto del procedimiento se conoce como Fase II.

2.2.1 Fase II del Algoritmo Simplex

Consideremos el problema

$$(\text{PL}) \min_{x \in S} c^t x$$

con $S = \{x \in I\!R^n / Ax = b, x \geq 0\}$ un poliedro.

Supongamos que $A \in \mathcal{M}_{mn}$ es de rango m, entonces A puede escribirse de la forma $A = [B, N]$, con $B \in \mathcal{M}_{mm}$ invertible, tal que $B^{-1}b \geq 0$.

Notemos $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix}$

Entonces, $Ax = Bx_B + Nx_N = b$ con lo que finalmente $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

El problema (PL) es equivalente a

$$\begin{array}{lll} \min & c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N & \\ & \quad x_B + B^{-1}Nx_N & = B^{-1}b \\ & \quad x_N & \geq 0 \\ & \quad x_B & \geq 0 \end{array}$$

Consideremos un punto x es factible, $\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$

Con esto, $\bar{c}^t x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1}b$.

Si $c_N^T - c_B^T B^{-1}N \geq 0$, no es aconsejable dar valor positivo a las variables en x_N.

Definición 2.1 *La cantidad $\pi^T = c_B^T B^{-1}$ se conoce como* ***vector de multiplicadores del Simplex****. Esta terminología proviene de la interpretación de las componentes de π como multiplicadores de Lagrange y como precio de equilibrio en el óptimo, como veremos más adelante.*

Ejemplo 2.1 *Consideremos el siguiente problema:*

$$\begin{array}{lrrcl}
\min & 3x_3 & +x_4 & & \\
 & -3x_3 & +3x_4 & \leq & 6 \\
 & -8x_3 & +4x_4 & \leq & 4 \\
 & x_3, & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

escrito en la forma canónica:

$$\begin{array}{lrrrrcll}
\min & 0x_1 & +0x_2 & +3x_3 & +x_4 & & & \\
 & x_1 & & -3x_3 & +3x_4 & = & 6 & \\
 & & x_2 & -8x_3 & +4x_4 & = & 4 & \\
 & & & & x_i & \geq & 0 & \forall i \in \{1,2,3,4\}
\end{array}$$

Elijamos $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donde: x_B : variables básicas o en la base

x_N : variables no-básicas o fuera de la base

x_1, x_2 : variables de holgura

x_3, x_4 : variables estructurales

Se puede despejar x_1, x_2 en función de x_3, x_4 y reemplazar en la función objetivo. Notar que todo queda igual, pues $B = I$ y $\bar{c}_B = 0$.

Como $c_N^T - \pi^T N = (3, 1) \geq 0$, la solución es óptima.

$$\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Criterio de Optimalidad

En un problema de minimización escrito en la forma canónica, si las variables no básicas tienen asociado un coeficiente $\overline{c}_N^T = c_N^T - \pi^T N \geq 0$, entonces la solución $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ es óptima.

Habitualmente, los datos se ordenan en un cuadro:

$$\begin{array}{cc|c} 0 & \overline{c}_N^T & -\pi^T b \\ \hline I & B^{-1}N & B^{-1}b \end{array} \quad (*)$$

$\overline{c}_N^T = c_N^T - \pi^T N$ se llama vector de costos reducidos.

Ejemplo 2.2 *Consideremos el siguiente ejemplo:*

$$\begin{array}{lrrcl} \min & -3x_3 & +x_4 & & \\ & -3x_3 & +3x_4 & \leq & 6 \\ & -8x_3 & +4x_4 & \leq & 4 \\ & x_3, & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Siguiendo el procedimiento anterior, escribamos la siguiente tabla:

$$\begin{array}{cccc|c} & & \downarrow & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -z \\ \hline 0 & 0 & -3 & 1 & 0 = -\pi^T b \\ \hline 1 & 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -8 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Tal como en el ejemplo anterior, $x = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ es una solución factible; pero no es óptima, pues $\overline{c}_3 < 0$

¿Conviene hacer crecer una variable no básica a un valor positivo? Sí.

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_4 + 6 + 3x_3 \\ x_2 &= -4x_4 + 4 + 8x_3 \end{aligned}$$

Tomando $x_4 = 0$ (fuera de la base), x_3 puede crecer indefinidamente, disminuyendo el costo total, sin violar las restricciones, dado que las variables x_1 y x_2 se mantienen positivas. Más aún, este problema es no acotado.

- Criterio de no acotamiento

Si un costo reducido es negativo y los elementos en la columna correspondiente son negativos o nulos, en al menos una de las filas, entonces el problema es no acotado.

Observación 2.1 *Si la columna es enteramente nula, la variable es irrelevante.*

Ejemplo 2.3 *Veamos ahora el ejemplo:*

$$
\begin{array}{rrrcl}
\min & 3x_3 & -x_4 & & \\
 & -3x_3 & +3x_4 & \leq & 6 \\
 & -8x_3 & +4x_4 & \leq & 4 \\
 & x_3 & , x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Escribamos la tabla:

x_1	x_2	x_3	$\downarrow$ x_4	$-z$
0	0	3	-1	0
1	0	-3	3	6
0	1	-8	4	4

x_4 es una variable no básica cuyo costo reducido es negativo[3], luego conviene hacerla entrar a la base.

¿Cuánto puede crecer? Los datos en la columna asociada son todos positivos, luego el problema es acotado.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -3x_4 + 6 \\
x_2 &= -4x_4 + 4 \\
x_3 &= 0 \qquad \text{(fuera de la base)}
\end{aligned}
$$

Se necesita que $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, lo que implica que $x_4 \leq 1$.

Más aún, $x_4 = \min\{\frac{6}{3}, \frac{4}{4}\} = \min\limits_{\bar{a}_{ij}>0}\{\frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{ij}}\}$

[3]Si bien no hay resultados respecto a la elección entre las variables con costos negativos, conviene hacer ciertas convenciones. En este caso eligiremos siempre la variable de costo reducido *más* negativo

$$\begin{array}{cccc|cl}
 & & & \downarrow r & & \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & z & \\
\hline
0 & 0 & 3 & -1 & 0 & \\
\hline
1 & 0 & -3 & 3 & 6 & \\
0 & 1 & -8 & \boxed{4} & 4 & \leftarrow s \\
\hline
\end{array}$$

- Criterio de pivoteo

Se hace entrar a la base aquella variable cuyo costo reducido sea negativo. Sea x_r la elegida para entrar a la base, ¿cuál sale?

Se busca la fila s tal que $\dfrac{\bar{b}_s}{\bar{a}_{sr}} = \min\limits_i \{\dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ir}} / \bar{a}_{ir} > 0\}$ y se pivotea sobre el coeficiente en la posición (s, r).

Volvamos a la tabla:

$$\begin{array}{ccc|c}
\bar{c}_1 & \cdots & \bar{c}_n & -\bar{z} \\
\hline
\bar{a}_{11} & & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1 \\
\vdots & & \vdots & \\
\bar{a}_{m1} & \cdots & \bar{a}_{mn} & \bar{b}_m
\end{array}$$

Donde suponemos $\bar{b}_i \geq 0$

(1) Si $\bar{c}_j \geq 0 \ \ \forall j = 1, ..., n$, entonces la solución en curso en óptima. Las variables básicas son iguales a $\bar{b}_i$ y las no básicas son nulas.

(2) Si $\bar{c}_j < 0$ para algún j, la elegimos para entrar a la base. Usaremos el criterio descrito anteriormente de elegir la variable cuyo costo reducido es menor. Supongamos que dicha variable es la s.

(3) Si $\bar{a}_{is} \leq 0 \ \ \forall i = 1, ..., m$, el problema es no acotado.

(4) Si $\bar{a}_{is} > 0$ para algún i, se determina r tal que $\dfrac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min\{\dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} / \bar{a}_{is} > 0\}$ y se pivotea en $\bar{a}_{rs}$:

$$\bar{a}_{ij} \leftarrow \bar{a}_{ij} - \frac{\bar{a}_{is}\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}}$$

$$\bar{b}_i \leftarrow \bar{b}_i - \frac{\bar{a}_{is}\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$$

$$\overline{c}_j \leftarrow \overline{c}_j - \frac{\overline{c}_s \overline{a}_{rj}}{\overline{a}_{rs}}$$
$$-\overline{z} \leftarrow -\overline{z} - \frac{\overline{c}_s \overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}}$$

Observación 2.2 *Notar que esto corresponde precisamente al pivoteo de Gauss para la inversión de matrices, lo que es consistente con el esquema presentado en la tabla (*)*

Ejemplo 2.4 *Consideremos*

$$\begin{array}{lrrcl} \min & -x_1 & -3x_2 & & \\ & x_1 & +x_2 & \leq & 3 \\ & -3x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

El problema, escrito en la forma canónica, queda:

$$\begin{array}{lrrrrcll} \min & -x_1 & -3x_2 & +0x_3 & +0x_4 & & & \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 3 & \\ & -3x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 2 & \\ & & & & x_i & \geq & 0 & \forall i \in \{1,2,3,4\} \end{array}$$

Escribamos la tabla:

$$\begin{array}{cccc|cc} & \downarrow r & & & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -z & \\ \text{-1} & \text{-3} & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & \\ \text{-3} & \boxed{1} & 0 & 1 & 2 & \overrightarrow{s} \end{array} \rightsquigarrow (pivoteando) \begin{array}{cccc|cc} \downarrow r & & & & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -z & \\ \text{-10} & 0 & 0 & 3 & 6 & \\ \hline \boxed{4} & 0 & 1 & \text{-1} & 1 & \overrightarrow{s} \\ \text{-3} & 1 & 0 & 1 & 2 & \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -z \\ 0 & 0 & 5/2 & 1/2 & 17/2 \\ \hline 1 & 0 & 1/4 & \text{-1/4} & 1/4 \\ 0 & 1 & 3/4 & 1/4 & 11/4 \end{array}$$

Identificamos $x^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{11}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ como la solución óptima, luego el valor óptimo es $z = -17/2$

Definición 2.2 *Si una o más variables básicas se anulan, entonces la solución de un PL se dice* ***degenerada****. En caso contrario, la llamaremos* ***no-degenerada****.*

Observación 2.3 *Cuando la solución x de un PL es degenerada, existe más de una base asociada a ese vértice. En efecto, si $x \in I\!R^n$ tiene $p < m$ componentes positivas, donde m es el número de restricciones del problema, entonces podrían haber $\binom{n-p}{m-p}$ soluciones básicas factibles diferentes correspondientes a x.*

El punto x es el mismo, pero los conjuntos de variables etiquetadas básicas y no básicas son diferentes.

2.2.2 Fase I del Algoritmo Simplex: obtención de una solución inicial básica factible

Hasta ahora, sabemos resolver un PL dada una solución básica inicial. Esta generalmente viene dada por la base de las variables de holgura. La Fase I del Simplex consiste en encontrar una base factible cuando no se tiene directamente desde el problema.

Sabemos que el problema

$$
\begin{array}{lrl}
(P) \ \ \min & c^t x & \\
& Ax & = b \\
& x & \geq 0
\end{array}
$$

se puede resolver mediante el algoritmo Simplex, recorriendo puntos extremos de la forma

$$
x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0
$$

que se llaman soluciones básicas factibles.

El problema es conocer una solución básica factible para comenzar el algoritmo. Este problema (que corresponde a investigar la factibilidad de (P)) puede plantearse mediante el siguiente problema auxiliar:

$$
\begin{array}{lrl}
(P_a) \ \ \min & \sum\limits_i x_{ai} & \\
& Ax + x_a & = b \\
& x, x_a & \geq 0
\end{array}
$$

Notemos que $x \in I\!R^n$ y $x_a \in I\!R^m$. Bajo el supuesto razonable $b \geq 0$, una solución básica factible evidente para este problema es $x = 0$ y $x_a = b$, luego podemos usar la Fase II del algoritmo simplex para resolverlo.

El problema (P_a) se resuelve considerando $B = I$ (x_a en la base), $N = A, c_B = 1^T$ y $c_N = 0^T$. Así, para este problema el cuadro inicial es:

$$\begin{array}{cc|c} \bar{c}_N^T & 0 & -c_B^T b \\ \hline A & I & b \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cc|c} c_N^T - c_B^T A & 0 & -c_B^T b \\ \hline A & I & b \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cc|c} -1\!\!I^T A & 0 & -1\!\!I^T b \\ \hline A & I & b \end{array}$$

donde $1\!\!I$ es el vector que tiene todas sus coordenadas iguales a 1, de manera que $1\!\!I^T b = b_1 + \ldots + b_m$. Las variables x_{ai} son llamadas *variables artificiales* y el propósito del problema (P_a) es llevarlas a tomar valores nulos. Esto es posible, siempre que el problema original tenga una solución factible. En tal caso, el método Simplex terminará con una solución básica factible, donde $x_{ai} = 0 \ \ \forall i$.

- Si en el óptimo de (P_a) se tiene algún $x_{ai} = 0 \ \ \forall i = 1, ..., m$, entonces la solución en curso es solución factible de (P).

La solución de (P_a) satisface

$$\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_a \end{pmatrix} = b,$$

con $\begin{pmatrix} x \\ x_a \end{pmatrix} \geq 0$, luego $\begin{pmatrix} x \\ x_a \end{pmatrix}$ es solución de (P_a) si y sólo si x es solución de (P).

- Si en el óptimo de (P_a) se tiene algún $x_{ai} > 0$, entonces el poliedro es vacío, es decir, (P) es infactible.

Ejemplo 2.5 *Consideremos*

$$\begin{array}{lccccl} \max & -x_1 & +2x_2 & & & \\ & x_1 & +x_2 & \geq & 1 & \\ & x_1 & -x_2 & = & 0 & \\ & x_1 & & \leq & 4 & \\ & & x_i & \geq & 0 & i \in \{1, 2\} \end{array}$$

Escribamos el problema en su forma canónica:

$$
\begin{array}{llllllll}
(P) & -\min & x_1 & -2x_2 & & & & \\
& & x_1 & +x_2 & -x_3 & & = & 1 \\
& & x_1 & & & +x_4 & = & 4 \\
& & x_1 & -x_2 & & & = & 0 \\
& & & & & x_i & \geq & 0 \quad \forall i \in \{1,2,3,4\}
\end{array}
$$

Luego, agregando las variables artificiales x_5, x_6, x_7 (son tres, dado el número de restricciones del problema $(P1)$), tenemos:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min & & & & & x_5 & +x_6 & +x_7 & & \\
& x_1 & +x_2 & -x_3 & & +x_5 & & & = & 1 \\
& x_1 & & & +x_4 & & +x_6 & & = & 4 \\
& x_1 & -x_2 & & & & & +x_7 & = & 0 \\
& & & & & & & x_i & \geq & 0 \quad \forall i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}
\end{array}
$$

Ya tenemos planteado el problema que necesitamos resolver. Escribamos la tabla y apliquemos el método Simplex [4]:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|rl}
\downarrow & & & & & & & & \\
-3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 & \\
\hline
1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \leftarrow
\end{array}
\qquad x^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T
$$

Primera iteración:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|rl}
 & \downarrow & & & & & & & \\
0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 & -5 & \\
\hline
0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & \leftarrow \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 4 & \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 &
\end{array}
\qquad x^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{4} & 0 \end{pmatrix}^T
$$

Segunda iteración:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|rl}
 & & & \downarrow & & & & & \\
0 & 0 & -1/2 & -1 & 3/2 & 0 & 3/2 & -7/2 & \\
\hline
0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & \\
0 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 & 7/2 & \leftarrow \\
1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 &
\end{array}
\qquad x^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{1}{2}} & \mathbf{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}^T
$$

[4] las negrillas señalan las variables en la base para cada iteración.

Tercera iteración:

0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	$-1/2$	0	$1/2$	0	$-1/2$	$1/2$
0	0	$1/2$	1	$-1/2$	1	$-1/2$	$7/2$
1	0	$-1/2$	0	$1/2$	0	$1/2$	$1/2$

$$x^4 = (\ \mathbf{\tfrac{1}{2}}\quad \mathbf{\tfrac{1}{2}}\quad 0\quad \mathbf{\tfrac{7}{2}}\quad 0\quad 0\quad 0\ )^T$$

En la última iteración todas las variables artificiales salen de la base, los costos reducidos asociados toman todos el valor 1 y $z = 0$.

Ya tenemos una solución básica factible. Ahora eliminamos las variables artificiales y recalculamos los costos reducidos y el valor objetivo para esta solución:

0	1	$-1/2$	0	$1/2$
0	0	$1/2$	1	$7/2$
1	0	$-1/2$	0	$1/2$

El vector de costos está dado por $c^t = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$, por lo tanto:

$$c_B^T = \begin{pmatrix}c_2 & c_4 & c_1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\end{pmatrix}^T, \quad c_N^T = \begin{pmatrix}c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$$

El orden en que se escribe el costo para las variables básicas depende del vector en la base canónica que las mismas tienen asociado.

Reconozcamos las matrices B y N en el problema original (P):

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Los costos reducidos serán:

$\overline{c}_B{}^T = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, como siempre

$$\overline{c}_N{}^T = c_N^T - \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T \text{ columna no básica del cuadro}} = -\tfrac{1}{2}$$

En tanto que:

$-\pi^T b = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 7/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$

Con esto el cuadro queda:

$$
\begin{array}{cccc|cl}
 & & \downarrow & & & \\
0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & \\
\hline
0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & \\
0 & 0 & 1/2 & 1 & 7/2 & \leftarrow \\
1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 &
\end{array}
$$

Aplicando la segunda fase del algoritmo Simplex, obtenemos:

$$
\begin{array}{cccc|c}
0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 4
\end{array}
$$

con lo cual $x^T = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ es solución óptima para el problema, y el valor objetivo de la función es $-(-\pi^T b) = 4$ (recordemos que hicimos el cambio $\max z = -\min -z$).

3 Introducción a la Dualidad en Programación Lineal

Comenzaremos el estudio de la dualidad en Programación Lineal con un ejemplo.

Ejemplo 3.1 *Una fábrica produce tres artículos en cantidades* x_1, x_2, x_3*, los cuales utilizan dos materias primas en su elaboración, digamos a y b.*

El proceso de producción debe satisfacer lo siguiente:

1) Para producir una unidad del artículo 1 se necesitan 2 unidades del recurso a y 5 del recurso b.

Para producir una unidad del artículo 2 se necesitan 3 unidades del recurso a y 2 del recurso b.

Para producir una unidad del artículo 3 se necesita 1 unidad del recurso a y 1 del recurso b.

2) El recurso a está disponible hasta 10 unidades y el recurso b hasta 20 unidades.

El precio unitario de venta del producto 1 es \$4, el del producto 2 es \$1 y el del producto 3 es \$5.

El problema del fabricante será el de maximizar sus utilidades (sus ingresos por venta, en este ejemplo) sujeto a sus restricciones en la producción.

El problema se plantea entonces en la forma:

$$
\begin{array}{llrrrcll}
(P) & \max & 4x_1 & +x_2 & +5x_3 & & & \\
 & & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & \leq & 10 & \\
 & & 5x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq & 20 & \\
 & & & & x_i & \geq & 0 & i = 1, 2, 3
\end{array}
$$

Tomemos una combinación lineal positiva de las restricciones, con multiplicadores y_1, y_2:

$$y_1(2x_1 + 3x_2 + x_3) + y_2(5x_1 + 2x_2 + x_3) \leq 10y_1 + 20y_2$$

Esto que puede reescribirse de la forma:

$$x_1(2y_1 + 5y_2) + x_2(3y_1 + 2y_2) + x_3(y_1 + y_2) \leq 10y_1 + 20y_2$$

Si imponemos las condiciones (1):

$$\begin{array}{rrcl} 2y_1 & +5y_2 & \geq & 4 \\ 3y_1 & +2y_2 & \geq & 1 \\ y_1 & +y_2 & \geq & 5 \end{array}$$

entonces,

$$z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 10y_1 + 20y_2 = \omega,$$

es decir, ω acota superiormente a la función objetivo de (P) cuando se satisface (1). Luego, es razonable preguntarse si el mínimo de la función ω es igual máximo de la función z. Es decir, planteamos el siguiente problema asociado a los multiplicadores y_i:

$$\begin{array}{llrrcl} (D) & \min & 10y_1 & +20y_2 & & \\ & & 2y_1 & +5y_2 & \geq & 4 \\ & & 3y_1 & +2y_2 & \geq & 1 \\ & & y_1 & +y_2 & \geq & 5 \\ & & & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

y quisiéramos averiguar si el valor **máximo de** z (óptimo de (P)) coincide con el valor **mínimo de** ω (óptimo de (D)).

Notemos que partimos de un problema de la forma

$$\text{(P)} \qquad \max \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

y llegamos a otro de la forma

$$\text{(D)} \qquad \min \begin{pmatrix} 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

3.1 Definición de dualidad y principales propiedades

Lo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 3.1 *Sea:*

$$\begin{array}{llrl} (P) & \max & c^T x & \\ & & Ax & \leq b \\ & & x & \geq 0 \end{array}$$

un problema que llamaremos ***Problema Primal.*** *El problema:*

$$\begin{array}{llrl} (D) & \min & b^T y & \\ & & A^T y & \geq c \\ & & y & \geq 0 \end{array}$$

se llamará ***Problema Dual de (P).***

Teorema 3.1 *La dualidad es simétrica, es decir, el dual de (D) es (P).*

Demostración. Para demostrar este teorema tomaremos el problema:

$$\begin{array}{llrl} (D) & \min & b^T y & \\ & & A^T y & \geq c \\ & & y & \geq 0 \end{array}$$

y lo transformaremos para escribirlo en forma "primal", es decir, como un problema de maximización, con restricciones de tipo $\leq$, y positividad en las variables. Esto es, (D) es equivalente a:

$$\begin{array}{llrl} (\widetilde{D}) & -\max & (-b)^T y & \\ & & (-A)^T y & \leq -c \\ & & y & \geq 0 \end{array}$$

El problema dual asociado a $(\widetilde{D})$, según la definición anterior, es:

$$\begin{array}{lrl} -\min & (-c)^T x & \\ & (-A)x & \geq -b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

que a su vez es equivalente a:

$$
\begin{array}{rrrl}
(P) & \max & c^T x & \\
 & & Ax & \leq b \\
 & & x & \geq 0
\end{array}
$$

que es entonces el dual de (D). ■

Observación 3.1 *El teorema precedente muestra que la nociones de primal y dual son arbitrarias, en el sentido que ambos problemas son duales mutuos. Así, como se verá más adelante, cualquier problema puede ser denominado* primal *y su* dual, *que siempre existe, no es único, en el sentido que un mismo problema puede escribirse en más de una forma.*

Una noción limpia *de dualidad requiere que las variables de un problema pertenezcan a un espacio cuya dimensión sea igual al número de restricciones del dual (por* restricciones *entendemos las ecuaciones o inecuaciones lineales, sin incluir las condiciones de signo de las variables).*

Teorema 3.2 (Teorema de Dualidad Débil) *Sea*

$$
\begin{array}{rrrl}
(P) & \max & c^T x & \\
 & & Ax & \leq b \\
 & & x & \geq 0
\end{array}
$$

un problema primal y

$$
\begin{array}{rrrl}
(D) & \min & b^T y & \\
 & & A^T y & \geq c \\
 & & y & \geq 0
\end{array}
$$

su dual. Consideremos también x e y, puntos factibles de (P) y (D), respectivamente. Entonces se cumple

$$c^T x \leq b^T y$$

es decir, la función objetivo del problema dual acota (en este caso, superiormente) a la del primal.

Demostración. Si multiplicamos por $x^T \quad (\geq 0)$ la inecuación $A^T y \geq c$, se obtiene que $x^T A^T y \geq x^T c$, de donde $c^T x \leq (Ax)^T y \leq b^T y$, pues $y \geq 0$ ■

Corolario 3.1 *Sean* $\widetilde{x}$ *e* $\widetilde{y}$ *puntos factibles para (P) y (D). Si* $c^T\widetilde{x} = b^T\widetilde{y}$*, entonces* $\widetilde{x}$ *e* $\widetilde{y}$ *son óptimos respectivos.*

Demostración. Es consecuencia directa del teorema de Dualidad Débil:

$b^T\widetilde{y} = c^T\widetilde{x} \leq b^T y \quad \forall y$ punto factible de (D), es decir, $\widetilde{y}$ es óptimo de (D).

$c^T\widetilde{x} = b^T\widetilde{y} \geq c^T x \quad \forall x$ punto factible de (P), es decir, $\widetilde{x}$ es óptimo de (P). ■

Ejercicio 3.1 *El dual del problema de Programación Lineal estándar*

$$\begin{array}{llrcl} (P) & \min & c^T x & & \\ & & Ax & = & b \\ & & x & \geq & 0 \end{array}$$

es el problema

$$\begin{array}{llrcl} (D) & \max & b^T y & & \\ & & A^T y & \leq & c \end{array}$$

Hint. Para resolver este ejercicio, se sugiere desdoblar la restricción de igualdad en el problema (P), escribirla en forma $\geq$ y luego aplicar la definición de dualidad.

Teorema 3.3 (Teorema de Dualidad Fuerte) *Consideremos la pareja primal-dual*

$$\begin{array}{llrcl} (P) & \min & c^T x & & \\ & & Ax & = & b \\ & & x & \geq & 0 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{llrcl} (D) & \max & b^T y & & \\ & & A^T y & \leq & c \end{array}$$

Entonces:

a) Si $\widetilde{z}$ *(valor mínimo de (P)) es finito, entonces* $\widetilde{\omega}$ *(valor máximo de (D)) también lo es y se cumple* $\widetilde{z} = \widetilde{\omega}$

b) Si $\widetilde{\omega}$ *es finito, entonces* $\widetilde{z}$ *también lo es y* $\widetilde{z} = \widetilde{\omega}$

c) Si (P) es no acotado, entonces (D) es infactible

d) Si (D) es no acotado, entonces (P) es infactible

Demostración.

a) Dado que $\widetilde{z}$ es finito, existe un $\widetilde{x}$ solución óptima básica factible de (P). Entonces existe también B, submatriz de $A = [B, N]$, tal que $\widetilde{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_B \\ \widetilde{x}_N \end{pmatrix}$

   Además, en el óptimo los costos reducidos de las variables no básicas son positivos, es decir para $\pi = B^{-T}c_B$ se tiene

$$c_N^T - \pi^T N \geq 0$$

   lo que implica

$$N^T \; \pi \leq c_N$$

   Probaremos que π es solución básica factible óptima de (D), con lo cual, $\widetilde{\omega} = b^T\pi$ será finito.

   En efecto, π es factible para (D), pues

   $A^T\pi = \begin{pmatrix} B^T \\ N^T \end{pmatrix} B^{-T}c_B = \begin{pmatrix} c_B \\ N^T\pi \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix} = c$

   y π es óptimo para (D), pues

   $\widetilde{\omega} = b^T\pi = b^T B^{-T} c_B = \begin{pmatrix} c_B^T & c_N^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = c^T\widetilde{x} = \widetilde{z}$

   y por el teorema de Dualidad Débil, π es óptimo.

b) Análogo.

c) Sabemos que (P) es no acotado. Supongamos entonces que existe $\bar{y}$ tal que $A^T\bar{y} \leq c$ (esto es la factibilidad del dual). Por el teorema de Dualidad Débil, $b^T\bar{y} \leq c^T x, \forall x$ punto primal-factible. Esto dice que (P) es acotado. Contradicción.

d) Análogo. ■

Resumamos los resultados anteriores en el siguiente cuadro:

Primal

Dual		$\widetilde{z}$ finito	(P) no acotado	(P) infactible
	$\widetilde{\omega}$ finito	Sí	No	No
	(D) no acotado	No	No	Sí
	(D) infactible	No	Sí	Sí

Ejercicio 3.2 *Indique un ejemplo de un par primal-dual, en que ambos problemas sean infactibles.*

Teorema 3.4 (Holgura Complementaria) *Consideremos la pareja primal-dual*

$$
\begin{array}{lrcl}
(P)\min & c^T x & & \\
& Ax & = & b \\
& x & \geq & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lrcl}
(D)\max & b^T y & & \\
& A^T y & \leq & c
\end{array}
$$

Si x^* *e* y^* *son óptimos respectivos de (P) y (D), y* $s^* = c - A^T y^*$, *entonces* $x^{*T} s^* = 0$.

Demostración: Por el teorema de dualidad fuerte $c^T x^* = b^T y^*$, luego
$c^T x^* = b^T y^* = x^{*T} A^T y^* = x^{*T}(c - s^*) = x^{*T} c - x^{*T} s^*$, lo que implica $x^{*T} s^* = 0$. ■

Observación 3.2 *La condición de holgura complementaria* $x^{*T} s^* = 0$ *se puede cambiar en forma equivalente, por* $x_i^* s_i^* = 0 \quad i = 1, .., n$.

3.2 Interpretación económica de la dualidad

El dual de un problema lineal surge naturalmente de las condiciones de optimalidad del problema primal (P) (llamadas condiciones de Karush-Kuhn-Tucker, que veremos ms adelante).

Probaremos que si el problema primal tiene una interpretación económica, entonces también el dual y los valores óptimos de las variables duales pueden ser interpretados como precios.

Como ya vimos $x = \begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ es una solución básica factible para un programa lineal en la forma estándar. Dado que $x_B \geq 0$, una pequeña perturbación del lado derecho Δb no provoca un cambio en la base óptima. Luego, cuando b es reemplazado por $b + \Delta b$, la nueva solución óptima se transforma en $x' = \begin{bmatrix} x'_B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}(b + \Delta b) \\ 0 \end{bmatrix}$

y el valor óptimo de la función objetivo se perturba en

$$\Delta z = c_B^T B^{-1} \Delta b = \pi^{*T} \Delta b$$

donde $\pi^* = B^{-T} c_B$ es el multiplicador del problema primal en el óptimo. Como probamos en el teorema de dualidad fuerte, π^* es la solución óptima del problema dual. Claramente,

π_i^* puede verse como el precio marginal del i-ésimo recurso (es decir, el lado derecho b_i), ya que da el cambio en el valor objetivo óptimo por unidad de incremento en ese recurso. Esta interpretación puede ser muy útil, pues indica la cantidad máxima que uno está dispuesto a pagar por aumentar la cantidad del i-ésimo recurso. Note que las condiciones de holgura complementaria implican que el precio marginal para un recurso es cero si tal recurso no fue completamente utilizado en el óptimo. Otros nombres dados a este precio en el óptimo son *precio sombra* y *precio de equilibrio*.

Estos precios sombras son útiles también para determinar cuando es conveniente agregar una nueva actividad.

Veamos ahora otra interpretación económica posible. Supongamos que estamos bajo competencia perfecta y un productor resuelve:

$$\begin{array}{rrcl} \max & c^T x & & \\ & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

es decir, desea maximizar las utilidades dadas por el vector de precios c, sujeto a las restricciones de capacidad de su firma. En el óptimo las restricciones no necesariamente se cumplen con igualdad, es decir podrían sobrar ciertas materias primas que se pueden vender en el mercado en un cierto precio, dado por el vector $\lambda \geq 0$. Entonces, lo que este productor resuelve es:

$$\begin{array}{rc} \max & c^T x + \lambda^T (b - Ax) \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Así, las utilidades de la firma están dadas por:

$$\varphi(\lambda) = \max\{\lambda^T b + (c - A^T\lambda)^T x, \;\; x \geq 0\} = \lambda^T b + \max\{(c - A^T\lambda)^T x, \;\; x \geq 0\}$$

Las posibles soluciones de este problema son dos:

- Si el vector $(c - A^T\lambda)$ tiene todas sus componentes negativas, dado que el vector x es positivo, se tiene que el máximo es cero, y $\varphi(\lambda) = \lambda^T b$.
- Si el vector $(c - A^T\lambda)$ tiene alguna coordenada positiva, entonces, por el mismo argumento, el subproblema de maximización es no acotado, luego $\varphi(\lambda) = \infty$.

Pero, el mercado, "que es cruel", asigna al productor el mínimo de utilidades, a través de la fijación de precios. Como conoce la situación de costos e infraestructura (suponiendo información completa), resuelve:

$$\begin{array}{rrcl} \min & b^T\lambda & & \\ & A^T\lambda & \geq & c \\ & \lambda & \geq & 0 \end{array}$$

que es el problema dual asociado al inicial. Esta idea inspiró en los años 50 muchos trabajos relacionados a la teoría del Equilibrio General de la Economía[5].

3.3 Relaciones de dualidad (cómo determinar el dual de cualquier problema lineal)

Prob. de minimización	Prob. de maximización
tipo de restricción	variable asociada
$\leq$	≤ 0
$\geq$	≥ 0
$=$	irrestricta
tipo de variable	restricción asociada
≥ 0	$\leq$
≤ 0	$\geq$
irrestricta	$=$

3.4 Ejercicios de dualidad

Ejercicio 3.3 *Escriba un problema dual para cada uno de los siguientes problemas:*

$$\begin{array}{rlrcl} (P_1) & \min & c^Tx & & \\ & & Ax & \geq & b \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rlrcl} (P_2) & \min & c^Tx & & \\ & & Ax & = & b \end{array}$$

[5]Un famoso trabajo en este ámbito es "The Coefficient of Resource Utilization", de Gerard Debreu. (Disponible en http://cowles.econ.yale.edu/P/cp/p00a/p0045.pdf)

Hint:
Para ambos problemas, defina las variables $x_1, x_2 \geq 0$, tales que $x = x_1 - x_2$ y aplique luego la definición de dualidad ya conoce.

Es importante que los problemas duales que derive tengan la propiedad siguiente: si el primal tiene n variables y m (in)ecuaciones, entonces el dual tiene m variables y n (in)ecuaciones (es decir, los números n y m no consideran las restricciones de signo).

Solución:

$$\begin{array}{rlrcl} (D_1) & \max & b^T u & & \\ & & A^T u & = & c \\ & & u & \geq & 0 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rlrcl} (D_2) & \max & b^T u & & \\ & & A^T u & = & c \end{array}$$

Ejercicio 3.4 *Usando la tabla de la subsección anterior, escriba el dual del problema:*

$$\begin{array}{rlrrrcl} (P) & \min & -x_1 & +x_2 & +8x_3 & & \\ & & x_1 & -3x_2 & +3x_3 & \leq & 50 \\ & & 5x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 20 \\ & & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Solución:

$$\begin{array}{rlrrcr} (D) & \max & 50y_1 & +20y_2 & & \\ & & y_1 & +5y_2 & \leq & -1 \\ & & -3y_1 & +2y_2 & \leq & 1 \\ & & 3y_1 & +y_2 & = & 8 \\ & & y_1 & & \leq & 0 \end{array}$$

3.5 Algoritmo Simplex-dual

Supongamos que tenemos el siguiente cuadro *dual factible*, es decir, los costos reducidos son positivos, pero el lado derecho $\bar{b}$ no es necesariamente positivo (la solución básica en curso no es positiva, luego no es factible). Entonces, llamando $\pi = B^{-T} c_B$ es fácil ver que si $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$ tenemos que $N^T \pi \leq c_N$. Como además $B^T \pi = c_B$, se tiene que $A^T \pi \leq c$, es decir, π es factible en el dual. Supongamos entonces que la base B satisface:

- $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$ (condición de dual factibilidad)

0	$\bar{c}_N^T$	$-\bar{z}$
I	$\bar{N}$	$\bar{b}$

denotando $\bar{N} = B^{-1}N, \quad \bar{b} = B^{-1}b$.

Los siguientes pasos resumen el Algoritmo Simplex-dual:

(1) Si $\bar{b} \geq 0 \;\; i = 1, .., m$, entonces la solución en curso es óptima. Si no, ir a (2).

(2) Elegir $\bar{b}_r = \min\limits_{\bar{b}_i < 0} \{\bar{b}_i\}$. En realidad, se puede elegir cualquier $\bar{b}_i < 0$.

- Si $\bar{a}_{rj} \geq 0 \; \forall j = 1, .., n$ entonces el problema *dual es no acotado*, es decir, el problema primal es infactible.
- Si algún $\bar{a}_{rj} < 0$, pasar a (3).

(3) Elegir la columna s tal que:

$$\frac{\bar{c}_s}{\bar{a}_{rs}} = \max\{\frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{rj}} \;/\; \bar{a}_{rj} < 0\}$$

e ir a (4).

(4) Pivotear en la posición (r, s) y volver a (1).

Contrariamente al Algoritmo Simplex (primal) este algoritmo visita soluciones dual-factibles hasta alcanzar factibilidad primal.

4 Introducción al Análisis Post-optimal (Análisis de Sensibilidad)

Muchas veces, una vez resuelto el problema lineal:

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

se desea examinar el comportamiento de la solución si se modifica alguno de sus parámetros. Algunos de estos cambios pueden ser:

- Variación en los coeficientes de la función objetivo.
- Variación en el vector de recursos.
- Introducción de una nueva variable.
- Introducción de una nueva restricción.

Puede suceder que nuestro problema sea muy complejo y no se desee resolver completamente de nuevo parta analizar estos cambios, por ejemplo por problemas de tiempo. La siguiente sección examina los mencionados casos.

4.1 Variación en los coeficientes de la función objetivo

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{array}{rrrrl} \min & -20x_1 & -16x_2 & -12x_3 & \\ & x_1 & & & \leq 400 \\ & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 1000 \\ & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 1600 \\ & & & x_i & \geq 0 \end{array}$$

Una solución inicial es $x_0 = (0,0,0)^T$ (notar que es un punto extremo del poliedro). El cuadro Simplex inicial es:

-20	-16	-12	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	400
2	1	1	0	1	0	1000
2	2	1	0	0	1	1600

$\rightsquigarrow$ (pivoteando)

4	0	0	0	8	4	14400
2	0	1	0	2	-1	400
0	1	0	0	-1	1	600
1	0	0	1	0	0	400

Por lo tanto, la solución es:

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 600 \\ 400 \end{pmatrix} \qquad x_{holg} = \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La base está compuesta por $[x_3, x_2, x_4]$ y el valor óptimo es -\$14.400. Qué sucede si nos informan que el coeficiente c_1 vale -30 en lugar de -20?

Examinemos los costos reducidos (los demás elementos del cuadro, es decir, $B^{-1}N$, $B^{-1}b$, y $c_B^T B^{-1}b$ no sufren alteraciones, dado que c_1 no participa en ellos).

$\bar{c}_5 = 8$ no se modifica.

$\bar{c}_6 = 4$ no se modifica.

$$\bar{c}_1 = c_1 - c_B^T B^{-1} A_1 = -30 - \begin{pmatrix} -12 & -16 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -6$$

Por lo cual el cuadro final ha cambiado, transformándose en:

-6	0	0	0	8	4	14400
2	0	1	0	2	-1	400
0	1	0	0	-1	1	600
1	0	0	1	0	0	400

que no es óptimo, por lo tanto al pivotear (x_1 entra a la base) se llega a:

0	0	3	0	14	1	15600
1	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	200
0	1	0	0	-1	1	600
0	0	$-\frac{1}{2}$	1	-0	$\frac{1}{2}$	200

y la nueva solución es:

$$x^* = \begin{pmatrix} 200 \\ 600 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_{holg} = \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La base cambió a $[x_1, x_2, x_4]$ y el valor mínimo cayó a -\$15.600.

Qué sucede si $c_1 = -20$ se modifica a $c_1 = -20 + \theta$? Retomemos el asunto:

$\overline{c}_1 = c_1 - c_B^T B^{-1} a_1 = (-20 + \theta) - \begin{pmatrix} -12 & -16 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 + \theta$

que es positivo cuando $\theta \geq -4$. Es decir, el rango para el coeficiente c_1 con el que la base óptima $[x_3, x_2, x_4]$ no cambie es $c_1 \geq -24$.

Veamos otro caso. Supongamos ahora que el coeficiente perturbado es $c_2 = -16$ y pasa a ser $-16 + \gamma$. El vector de costos queda:

$$c = \begin{pmatrix} -20 \\ -16+\gamma \\ -12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Recordemos que las tres primeras componentes de este vector corresponden a los costos estructurales y las últimas tres corresponden a las variables de holgura, y por lo tanto son cero. Examinemos los costos reducidos:

$$\begin{aligned} \overline{c}_N^T &= c_N^T - c_b^T B^{-1} N \\ &= \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -12 & -16+\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 8+\gamma & 4-\gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Estos costos reducidos de las variables no básicas son positivos, es decir preservan la optimalidad, cuando:

$$-8 \leq \gamma \leq 4$$

o sea, la base $[x_2, x_3, x_4]$ no cambia si:

$$-24 \leq c_2 \leq -12$$

En general, si el vector c cambia a $\widetilde{c}$ se debe evaluar $\overline{\widetilde{c}}_N^T = \widetilde{c}_N^T - \widetilde{c}_B^T B^{-1} N$ y decidir:

- si $\overline{\widetilde{c}}_N^T \geq 0$, la base óptima no cambia y sólo hay que reevaluar $\widetilde{c}_B^T B^{-1} b = z^*$.
- si $\overline{\widetilde{c}}_N^T \ngeq 0$, se itera con algoritmo Simplex.

4.2 Variación en el vector de recursos (lado derecho)

Tomemos el mismo ejemplo y supongamos que el vector b cambia a $\widetilde{b}$. La base óptima para b es $[x_3, x_2, x_4]$ entonces se tiene que:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que la matriz B^{-1} es parte del cuadro final. Se tiene que:

- Si $B^{-1}\widetilde{b} \geq 0$, la solución en curso *aún es óptima*.
- Si $B^{-1}\widetilde{b} \ngeq 0$, la solución no es factible (primal), pero los costos reducidos no han sufrido cambios, luego el cuadro final presenta una solución primal-infactible y dual-factible. Entonces se debe iterar con el algoritmo Simplex-dual.

Veamoslo con un ejemplo: supongamos que $\widetilde{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 1000 \\ 1600 \end{pmatrix}$, por lo tanto:

$$B^{-1}\widetilde{b} = \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 100 \end{pmatrix} \geq 0$$

Así, la base óptima no cambia, pero:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \\ x_5^* \\ x_6^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 600 \\ 400 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Además, $z^* = c_B^T B^{-1}\widetilde{b} = \begin{pmatrix} -12 & -16 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 100 \end{pmatrix} = -14400.$

Una pregunta interesante es: cuál es el rango para $\widetilde{b}$, de modo que la base óptima no se modifique? Para ello, basta calcular:

$$B^{-1}\widetilde{b} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{b}_2 \\ \widetilde{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\widetilde{b}_2 - \widetilde{b}_3 \\ -\widetilde{b}_2 + \widetilde{b}_3 \\ \widetilde{b}_1 \end{pmatrix} \geq 0$$

De aquí se deduce que para que se cumpla la condición de optimalidad se debe tener:

$$\widetilde{b}_1 \geq 0 \qquad \widetilde{b}_2 \leq \widetilde{b}_3 \leq 2\widetilde{b}_2$$

Notemos que que los datos originales satisfacen estas condiciones.

4.3 Introducción de una actividad (o variable)

Supongamos que, en el ejemplo, se introduce la variable x_4 con costo $c_4 = -10$ y coeficientes $A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en la matriz, es decir, el problema se transforma en:

$$\begin{array}{rrrrrl} \min & -20x_1 & -16x_2 & -12x_3 & -10x_4 & \\ & x_1 & & & +x_4 & \leq 400 \\ & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & \leq 1000 \\ & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq 1600 \\ & & & & x_i & \geq 0 \end{array}$$

y el cuadro inicial es:

-20	-16	-12	**-10**	0	0	0	0
1	0	0	**1**	1	0	0	400
2	1	1	**0**	0	1	0	1000
2	2	1	**1**	0	0	1	1600

Si se realiza la misma secuencia de iteraciones para alcanzar la base óptima del problema original, el cuadro final es:

4	0	0	**-6**	0	8	4	14400
2	0	1	**-1**	0	2	-1	400
0	1	0	**1**	0	-1	1	600
1	0	0	**1**	1	0	0	400

Aquí, conviene observar que: $\bar{c}_4 = c_4 - c_B^T B^{-1} A_4$, es decir,

$$\bar{c}_4 = -10 - \begin{pmatrix} -12 & -16 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -6$$

Además:

$$B^{-1}A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, basta agregar la columna correspondiente a la nueva variable en el cuadro final original. Esta columna es:

$$\begin{pmatrix} c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 \\ \\ B^{-1} A_4 \end{pmatrix}$$

en que c_4 es el costo de la variable nueva y A_4 es el vector columna de dicha variable, en la matriz de restricciones.

En este caso, la nueva variable tiene costo reducido $-6 < 0$, y por lo tanto puede entrar a la base. Así el cuadro queda:

10	0	0	0	6	8	4	16800
3	0	1	0	1	2	-1	800
-1	1	0	0	-1	-1	1	200
1	0	0	1	1	0	0	400

La nueva variable permite disminuir el costo total desde -14400 a -16800 siendo la solución final:

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ 800 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Observación 4.1 *Podría la nueva variable producir no acotamiento? La respuesta es sí. La condición para ello es que* $B^{-1}A_4 \leq 0$.

En el ejemplo, nos interesa calcular para qué valores del nuevo costo c_4 la variable introducida es irrelevante en el óptimo (es decir, no pertenece a la base óptima). La condición para ello es que :

$$\overline{c}_4 = c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 \geq 0 \qquad \text{lo que implica} \qquad c_4 \geq c_B^T B^{-1} A_4 = -4$$

4.4 Introducción de una nueva restricción

Estamos tratando el problema:

$$\begin{array}{lll} \min & c^T x & \\ & Ax & = b \\ & x & \geq 0, \end{array}$$

cuyo cuadro óptimo, salvo reorden, está dado por:

0	$c_N^T - c_B^T B^{-1} N$	$c_b^T B^{-1} b$
I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

Supongamos que se agrega la restricción:

$$d^T x \leq d_0,$$

en que $d \in I\!R^n$ y $d_0 \in I\!R$. Es decir, agregamos:

$$d^T x + x_{n+1} = d_0,$$

siendo x_{n+1} una variable de holgura. Así, el problema original se puede plantear como:

$$\begin{array}{lrl}
\min & c_B^T x_B + c_N^T x_N + 0 x_{n+1} & \\
 & B x_B + N x_N + \overrightarrow{0}\, x_{n+1} & = b \\
 & d_B^T x_B + d_N^T x_N + x_{n+1} & = d_0 \\
 & x_B, x_N, x_{n+1} & \geq 0
\end{array}$$

en que $d = \begin{pmatrix} d_B \\ d_N \end{pmatrix}$. O bien, el nuevo problema es:

$$\begin{array}{lrl}
\min & \begin{pmatrix} c^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} & \\
 & \begin{bmatrix} A & 0 \\ d^T & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} \\
 & x, x_{n+1} & \geq 0
\end{array}$$

Agreguemos x_{n+1} a la base, es decir propongamos:

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ d_B^T & 1 \end{bmatrix}$$

cuya inversa es:

$$\widetilde{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -d_B^T B^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Cómo se modifica el cuadro final? Veamos término a término:

- $\bar{c}_N^T = c_N^T - \begin{pmatrix} c_B^T & 0 \end{pmatrix} \widetilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} N \\ d_N^t \end{pmatrix} = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$ (los costos reducidos no cambian)

- $\widetilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -d_B^T B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ -d_B^T B^{-1} b + d_0 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} c_B^T & 0 \end{pmatrix} \widetilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} = c_B^T B^{-1} b.$

0	$c_N^T - c_B^T B^{-1} N$	0	$c_b^T B^{-1} b$
I	$B^{-1}N$	0	$B^{-1}b$
0	$d_N^T - d_B^T B^{-1} N$	1	$d_0 - d_B^T B^{-1} b$

Luego,

- Si $d_0 - d_B^T B^{-1} b \geq 0$, la solución propuesta en los datos originales sigue siendo óptima, sólo que la holgura x_{n+1} entra a la base con valor $d_0 - d_B^T B^{-1} b$.

- Si $d_0 - d_B^T B^{-1} b < 0$, la solución propuesta *no es factible*, pues la holgura x_{n+1} toma un valor negativo. Iterar con algoritmo Simplex-dual, pivoteando sobre la fila agregada. En este caso, si $d_N^T - d_B^T B^{-1} N \geq 0$, el problema (primal) es infactible, dado que el dual es no acotado.

Retomemos el problema del inicio:

$$\begin{array}{rrrrl} \min & -20x_1 & -16x_2 & -12x_3 & \\ & x_1 & & & \leq 400 \\ & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 1000 \\ & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 1600 \\ & & & x_i & \geq 0 \end{array}$$

Si se agrega la restricción: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 800$, es decir,

- $d_0 = 800$

- $d^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Entonces,

- $d_B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad [x_3, x_2, x_4]$
- $d_N^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad [x_1, x_5, x_6]$
- $d_N^T - d_B^T B^{-1} N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- $d_0 - d_B^T B^{-1} b = 800 - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 400 \end{pmatrix} = -200$

El cuadro óptimo del problema original,

4	0	0	0	8	4	14400
2	0	1	0	2	-1	400
0	1	0	0	-1	1	600
1	0	0	1	0	0	400

se transforma en (agregando una fila y una columna):

4	0	0	0	8	4	**0**	14400
2	0	1	0	2	-1	**0**	400
0	1	0	0	-1	1	**0**	600
1	0	0	1	0	0	**0**	400
-1	**0**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**1**	**-200**

Al pivotear con Simplex-dual, la última variable sale de la base (entra la primera) generando un nuevo cuadro óptimo y una nueva solución.

0	0	0	0	4	4	**4**	14000
0	0	1	0	0	-1	**2**	0
0	1	0	0	-1	1	**0**	600
0	0	0	1	-1	0	**1**	200
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**-1**	**200**

$x^* = \begin{pmatrix} 200 & 600 & 0 & 200 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \;\; z^* = -14.000.$