

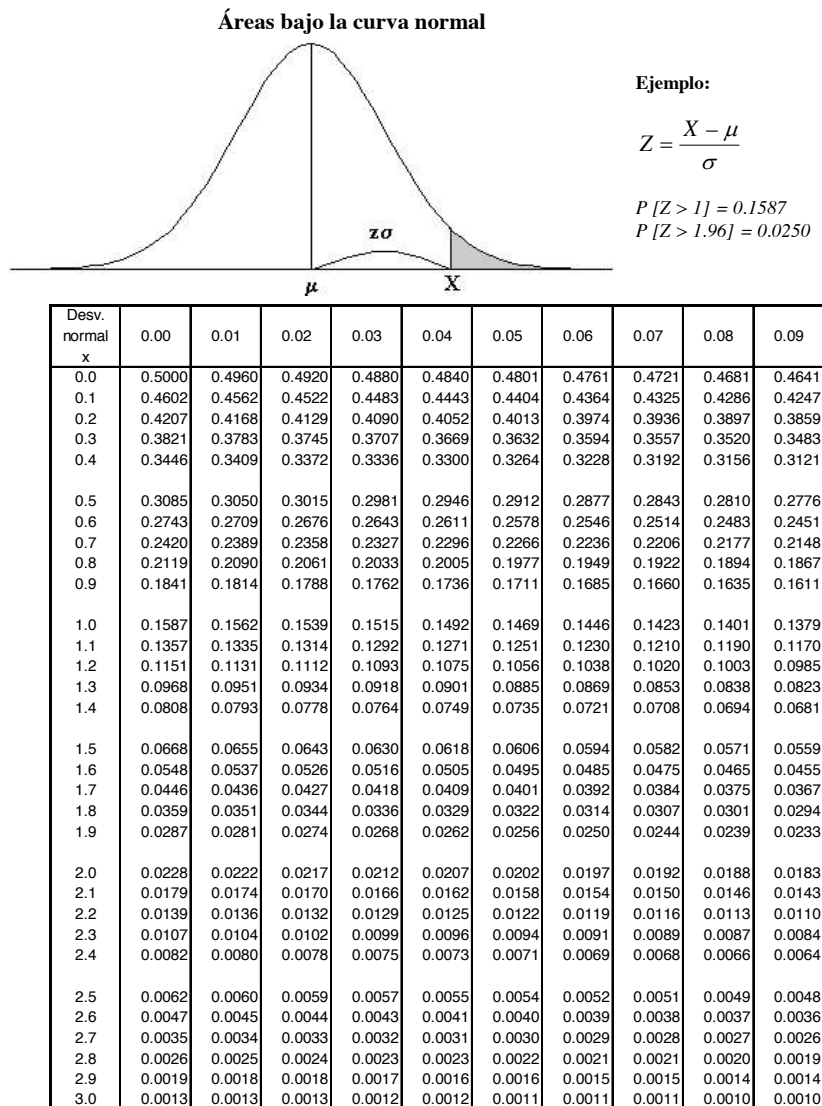
Control 2 MA34B Estadística Semestre Otoño 2006

Profesora titular: Nancy Lacourly.
Profesor reemplazante: Rodrigo Assar.
Auxiliar: Sebastián Court.

Pregunta1.-

- (a) Considere que la concentración de ADN de cierta bacteria de interés medida en una zona volcánica se distribuye según una normal de parámetros μ (desconocido) y $\sigma^2 = 2,25$.

TABLA 1: DISTRIBUCIÓN NORMAL



Se toma una muestra de 50 observaciones en dicha zona y se obtiene que la concentración promedio es de valor 1,56.

- (i) Decida el test $H_0 : \mu = 1,5$ versus $H_1 : \mu = 1,6$ con un nivel de significación $\alpha_0 = 10\%$.
- (ii) Para la muestra considerada, encuentre el menor valor μ_2 que siendo mayor que 1,5 permite aceptar H_0 si se compara contra $H_1 : \mu = \mu_2$, con un nivel de significancia de 10%.
- (b) Suponga que una variable sigue una distribución uniforme sobre el intervalo $(0, \theta)$ en que θ es desconocido. Considere X una única observación de dicha variable.

Sea el test de hipótesis $H_0 : \theta = 1$ versus $H_1 : \theta = 2$.

- (i) Muestre que existe una regla de decisión δ del test, tal que $\alpha(\delta) = 0$ y $\beta(\delta) < 1$.
- (ii) Entre todas las reglas tales que $\alpha(\delta) = 0$, encuentre aquella en que $\beta(\delta)$ es minimizado. Argumente su respuesta.
- (iii) Suponga que $X_1, \dots, X_n$ es una muestra de la misma variable analizada. A partir de dicha muestra encuentre la regla de decisión (δ) del test que minimiza $\beta(\delta)$ bajo la restricción $\alpha(\delta) = 0$ para el test $H_0 : \theta = 1$ versus $H_1 : \theta = 2$.
- (iv) Encuentre $\beta(\delta)$ para la regla encontrada en (iii).
Muestre que $\beta(\delta) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Indicación: Para la muestra $X_1, \dots, X_n$ puede serle útil considerar $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ y la región $W = \{Y_n > c\}$, con c escogido adecuadamente.

Pregunta2.-

- (a) Suponga que se sabe que las notas de una prueba corresponden a una variable aleatoria de distribución normal con media μ y varianza σ^2 desconocidas.

Se ha seleccionado aleatoriamente una muestra de 50 notas, de modo que $\bar{x}_n = 4,2$ y $S_n^2 = 1,0$.

- (i) Encuentre un intervalo para σ^2 de nivel de confianza 0,95. Esto es, encuentre σ_1^2 y σ_2^2 de modo que $\mathbb{P}(\sigma_1^2 \leq \sigma^2 \leq \sigma_2^2) = 0,95$. ¿Son los valores de σ_1^2 y σ_2^2 únicos? Explique.
- (ii) Se quiere decidir el test de hipótesis $H_0 : \mu \geq 4$ vs. $H_1 : \mu < 4$. Resuelva dicho test minimizando la probabilidad de error de tipo 2 de modo que $\alpha(\delta) \leq 0,05$.
Esto es imponiendo que $\mathbb{P}(\text{rechazar } H_0 | H_0 \text{ es cierto}) \leq 0,05$.
- (b) Un apostador indignado reclama que han alterado los cuatro mazos del juego. Tanto es el escándalo provocado por el jugador que se le permite revisar 80 cartas seleccionadas al azar entre las 208 con que se juega.

Entre las cartas obtenidas se tiene que 28 corresponden a tréboles, 24 son corazones y el resto corresponden a diamantes y a picas. El jugador asegura que esto probaría sus dichos.

Plantee un test de hipótesis que permita resolver esta controversia, re-suleva dicho test con una significancia de 5 %.

- (c) Un profesor quiere analizar la relación entre la asistencia a clases y la nota obtenida en el control previo a dichas clases. Para ello, a partir de una muestra de 40 alumnos se obtiene la tabla de contingencia que se presenta a continuación. ¿Se rechaza la hipótesis de independencia entre

	Azul	Rojo
Asisten	5	11
No asisten	4	20

CUADRO 1. Tabla de contingencia. Cantidad de alumnos que asisten a clases y color de su nota previa.

“la asistencia” y “el color de la nota” del control, si se considera una significancia de 10 %? Plantee y resuelva el test necesario para responder.

Pregunta3.- Se quiere saber si las edades de las mujeres y de hombres de la generación de ingresados el año 2003 a una universidad se ajustan a la misma distribución. Para ello, debido a la gran cantidad de alumnos, se consideran las siguientes muestras aleatorias:

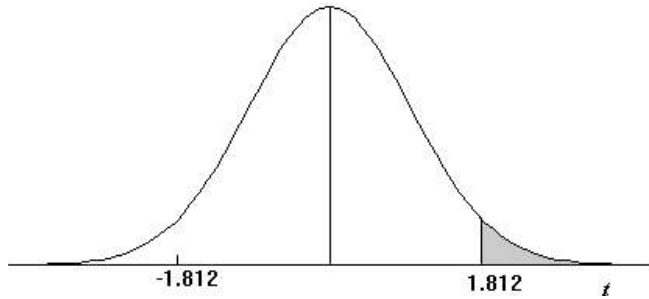
Hombres	254.5	249	252	253	255	251	249.5
	265	237	247.5	256	246	257	247
Mujeres	240	241	242	242.5	243	244	243.5
	245	244.5	245.5	249	248	248.5	255.5
	251.5	258.5	259.5	260.5			

CUADRO 2. Edades de hombres y mujeres (medidas en meses).

- (a) Suponga que se sabe que las Edades de los hombres se distribuyen según una distribución normal de parámetros μ_H y σ^2 , mientras que las Edades de las mujeres se distribuyen según una normal de parámetros μ_M y σ^2 . Considere que μ_H, μ_M y σ^2 son desconocidos. Decida el test $H_0 : \mu_H = \mu_M$ versus $H_1 : \mu_H \neq \mu_M$, de modo que $\alpha(\delta) \leq 0,05$ y $\beta(\delta)$ sea mínimo.
- (b) Considere que se desconocen las distribuciones de las edades de los hombres y de las mujeres. Suponga que se trata de distribuciones continuas que se denotan D_H y D_M respectivamente. Decida el test $H_0 : D_H = D_M$ versus $H_1 : D_H \neq D_M$, con una significancia de 5,22 %.
- (c) Considerando los datos de la muestra, grafique un histograma de las Edades de las mujeres. Si considera el test $H_0 : D_M = Normal(\mu_M, s_M^2)$, ¿cuál debiera ser el resultado?
- Explique por qué de (a) y (b) se obtienen decisiones opuestas.

TABLA 2: DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT

Puntos de porcentaje de la distribución t



Ejemplo

Para $\phi = 10$ grados de libertad:

$$P[t > 1.812] = 0.05$$

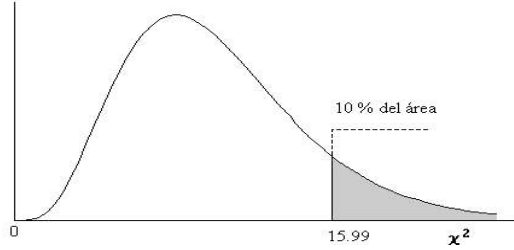
$$P[t < -1.812] = 0.05$$

α r	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	636,578
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,600
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,768
24	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,689
28	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,660
30	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,290

FIGURA 1. Tabla de distribución t de student.

TABLA 3: DISTRIBUCIÓN χ^2

Puntos de porcentaje de la distribución χ^2



Ejemplo:

Para $\phi = 10$ grados de libertad

$$P[\chi^2 > 15.99] = 0.10$$

π / ϕ	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	π / ϕ
1	3.93E-05	1.57E-04	9.82E-04	3.93E-03	1.58E-02	0.102	0.455	1.323	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	1
2	1.00E-02	2.01E-02	5.06E-02	0.103	0.211	0.575	1.386	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	2
3	7.17E-02	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	4
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	5
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	6
7	0.989	1.239	1.690	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.3	7
8	1.344	1.647	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.53	20.1	22.0	8
9	1.735	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.7	23.6	9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.5	23.2	25.2	10
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.9	24.7	26.8	11
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.0	23.3	26.2	28.3	12
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.4	24.7	27.7	29.8	13
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	15
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	16
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.79	16.34	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	17
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	18
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	19
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	20
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.34	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	21
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	22
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	23
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	24
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	25
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	26
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	27
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	28
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	29
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	30
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	40
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	50
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	60
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2	70
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3	80
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	80.6	89.3	98.6	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	90
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	90.1	99.3	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	100
Z_{α}	-2.58	-2.33	-1.96	-1.64	-1.28	-0.674	0.000	0.674	1.282	1.645	1.96	2.33	2.58	Z_{α}

Para $\phi > 100$ tómesse $\chi^2 = \frac{1}{2} \left(Z_{\alpha} + \sqrt{2\phi - 1} \right)^2$. Z_{α} es la desviación normal estandarizada correspondiente al nivel de significancia y se muestra en la parte superior de la tabla.

FIGURA 2. Tabla de distribución χ^2 .

Distribución H para Test de Kolmogorov-Smirnov

c	H (c)	c	H (c)
0.30	0.0000	1.20	0.8878
0.35	0.0003	1.25	0.9121
0.40	0.0028	1.30	0.9319
0.45	0.0126	1.35	0.9478
0.50	0.0361	1.40	0.9603
0.55	0.0772	1.45	0.9702
0.60	0.1357	1.50	0.9778
0.65	0.2080	1.60	0.9880
0.70	0.2888	1.70	0.9938
0.75	0.3728	1.80	0.9969
0.80	0.4559	1.90	0.9985
0.85	0.5347	2.00	0.9993
0.90	0.6073	2.10	0.9997
0.95	0.6725	2.10	0.9999
1.00	0.7300	2.30	0.9999
1.05	0.7798	2.40	1,000
1.10	0.8223	2.50	1,000
1.15	0.8580		

FIGURA 3. Tabla de distribución de Kolmogorov-Smirnov .