23/04/07 | PAUTA CONTROL 2 | MA34B
3horas | R. Assar, N. Lacourly, A. Peña

Problema 1

Parte A

(i) Se quiere encontar el menor número de ejecuciones n de modo que $\mathbb{P}(|\bar{X}-\mu| \leq 0{,}4) \geq 0{,}99$. Si suponemos que el tiempo de ejecución de la tarea es normal se tiene que $\bar{X} \sim N(E(X), Var(X)/n)$, lo que es aproximadamente cierto si no es así pero n es suficientemente grande (se considera así cuando $n \geq 30$). Entonces, $\mathbb{P}(|\bar{X}-E(X)| \leq 0{,}4) \geq 0{,}99$ es equivalente a decir $n \geq \frac{\sigma^2 \cdot z^2_{1-\alpha/2}}{0{,}4^2} = 10{,}36$.

Si $n < 30$ y no se tiene la normalidad del tiempo, se puede aplicar la desigualdad de Chebyshev de donde $n \geq \frac{\sigma^2}{0{,}01\cdot(0{,}4)^2} = 156{,}25$.

En consecuencia, si la distribución del tiempo de ejecución es desconocida basta tomar $n = 30$ y en el caso de normalidad $n = 11$.

(ii) Como $\bar{X} \sim N\big(\mu = E(X), \frac{Var(X)}{n}\big)$ y $\frac{(15-1)\tilde{S}^2}{(0{,}5)^2} \sim \chi^2_{15-1}$, se obtiene que:

$$\mathbb{P}\big(|\bar{X}-\mu| \leq 0{,}1\big) = 2\Phi\big(\frac{0{,}1\sqrt{15}}{0{,}5}\big) - 1 = 2\Phi(0{,}774) - 1$$

con Φ la distribución de la normal estandarizada. Además,

$$\mathbb{P}\big(|\tilde{S}^2-\sigma^2| \leq 0{,}1\big) = \mathbb{P}\big(8{,}4 \leq \chi^2_{14} \leq 19{,}6\big) = \mathbb{P}\big(\chi^2_{14} \leq 19{,}6\big) - \mathbb{P}\big(\chi^2_{14} \leq 8{,}4\big) = 0{,}7242$$

Parte B

(i) Por el lema de Neymann Pearson se tiene que debemos escoger δ de modo que $\alpha(\delta) = 0{,}05$ y tomar una región crítica del tipo $W_1 = \{\bar{X} \geq C_1\}$.

Así, imponemos que $\alpha(\delta) = \mathbb{P}\big(\text{rechazar } H_0|H_0 \text{ es verdadera}\big) = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}-0}{\frac{0{,}5}{20}} \geq \frac{C_1}{\frac{0{,}5}{\sqrt{400}}}\right)$ sea 0,05. En consecuencia obtenemos que $C_1 = z_{1-0{,}05} \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{400}} \approx 0{,}041$. El segundo criterio lleva a escoger $W_2 = \{\bar{X} \leq C_2\}$ con $C_2 = 1 + z_0{,}05 \cdot \frac{0{,}5}{20} \approx 0{,}959$.

(ii) Tomamos $W = \{\bar{X} \geq C\}$ con $C \in [0,1]$. Se tiene que $\alpha(\delta) + \beta'(\delta) = \mathbb{P}\big(N(0,1) \geq \frac{C}{\sigma/20}\big) + \mathbb{P}\big(N(0,1) < \frac{C-1}{\sigma/20}\big)$. Por la paridad de la densidad de la normal, que llamaremos f, se tiene que $\alpha(\delta) + \beta'(\delta) = \mathbb{P}\big(N(0,1) \geq \frac{C}{\sigma/20}\big) + \mathbb{P}\big(N(0,1) \geq \frac{1-C}{\sigma/20}\big)$. En consecuencia se debe encontar C para minimizar $\int_{1-C}^{\infty} f + \int_C^{\infty} f = 2\int_1^{\infty} f + \int_C^1 f + \int_{1-C}^1 f$, lo que corresponde a minimizar los últimos dos términos de la suma.

Sea $C \in [0,1]$, podemos escribir $C = \frac{1}{2} + k$ en que $|k| \leq \frac{1}{2}$. Con ello tenemos que minimizar $\int_{\frac{1}{2}+k}^1 f + \int_{\frac{1}{2}-k}^1 f = \int_{\frac{1}{2}+|k|}^1 f + \int_{\frac{1}{2}-|k|}^1 f$. Esto es igual a $2\int_{\frac{1}{2}}^1 f + \int_{\frac{1}{2}-|k|}^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+|k|} f$.
Como f es positiva y decreciente cuando se evalúa en valores mayores o iguales a 0, se tiene que $\int_{1/2-|k|}^{1/2} f - \int_{1/2}^{1/2+|k|} f \geq 0$. Se deduce que $C = 1/2$ y $W = \{\bar{X} \geq \frac{1}{2}\}$.

(iii) Como $\bar{X} = 0{,}4$ para la muestra, para la primera regla en (i) se rechaza que $\mu = 0$ mientras en la segunda se rechaza que $\mu = 1$. Para el criterio establecido en la parte (ii) se rechaza que $\mu = 0$. Las decisiones son distintas porque se establecieron a partir de criterios distintos.

Si se quiere minimizar la posibilidad de equivocarse al decir que $\mu = 0$ cuando no es cierto se opta por el primer criterio, si queremos tener baja probabilidad de equivocarnos al decir que $\mu = 1$ optamos por utilizar el segundo criterio de (i). Si nos interesa que sea poco probable tanto que nos equivoquemos al decir que $\mu = 0$ como que $\mu = 1$ optamos por el criterio de (ii).

Problema 2

Parte A

(i) Se aceptará que el tiempo de acceso medio es inferior a 20 segundos si hay gran evidencia muestral para respaldarlo, de modo que para tener certeza el test de hipótesis planteado debe ser

$$H_0 : \mu \geq 20 \quad \text{versus} \quad H_1 : \mu < 20$$

.

La hipótesis H_0 se aceptará cuando $Z_0 = \frac{\bar{X}-20}{\frac{0{,}5}{\sqrt{n}}} > -z_{1-0{,}05} = -1{,}645$. Como en nuestro caso al evaluar se obtiene $z_0 = \frac{20{,}1-20}{\frac{0{,}5}{\sqrt{25}}} = 1$, se acepta H_0. Es decir, no existe evidencia muestral suficiente para apoyar la hipótesis de que el tiempo medio sea menor a $20[segs.]$.

(ii) $I\!P\big(Z_0 > -z_0{,}95|\mu = 19{,}91\big) = I\!P\left(\frac{\bar{X}-19{,}91}{\frac{0{,}5}{\sqrt{n}}} + \frac{19{,}91-20}{\frac{0{,}5}{\sqrt{n}}} > -z_{0{,}95}\right) = I\!P\left(N(0,1) > -z_{0{,}95} + \frac{20-19{,}91}{\frac{0{,}5}{\sqrt{n}}}\right) = 0{,}7719.$

(iii) Imponemos $0{,}2 = I\!P\left(N(0,1) > -z_{0{,}95} + \frac{20-19{,}91}{\frac{0{,}5}{\sqrt{n}}}\right)$, de donde $-z_{0{,}95} + \frac{20-19{,}91}{\frac{0{,}5}{\sqrt{n}}} = 0{,}84$. En consecuencia $n = 191$.

Parte B

(i) Por el T.L.C. aproximamos que $\bar{Y} \sim N\big(\frac{1}{p}, \frac{1-p}{n \cdot p^2}\big)$, con lo que $Z = \frac{\bar{Y}-\frac{1}{p}}{\sqrt{\frac{1-p}{n \cdot p^2}}} = \frac{\sqrt{n}(p\bar{Y}-1)}{\sqrt{1-p}} \sim N(0,1)$. Así, $-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96$ con probabilidad 0,95.

(ii) $|Z| \leq 1{,}96 \Leftrightarrow n\bar{Y}^2 \cdot p^2 + (1{,}96^2 - 2n\bar{Y}) \cdot p + (n - 1{,}96^2) \leq 0$.
En onsecuencia aproximamos que $p \in [p_1, p_2]$ con probabilidad 0,95 para p_1 y p_2 soluciones de $n\bar{Y}^2 \cdot p^2 + (1{,}96^2 - 2n\bar{Y}) \cdot p + (n - 1{,}96^2) = 0$.
Haciendo el cálculo se obtiene que $p_{1,2} = \frac{(2 \cdot 200 \cdot 3{,}5 - 1{,}96^2) \pm \sqrt{(1{,}96^2 - 2 \cdot 200 \cdot 3{,}5)^2 - 4 \cdot 200 \cdot 3{,}5^2(200 - 1{,}96^2)}}{2 \cdot 200 \cdot 3{,}5^2}$, de donde $p_1 \approx 0{,}251$ y $p_2 \approx 0{,}318$. Es decir, aproximamos que $p \in [0{,}251, 0{,}318]$ con probabilidad 0,95.