23.04.2007 **CONTROL 2** MA 34B

Duración: 3 horas

R. Assar, N.Lacourly, A. Peña

Pregunta 1

Se desea estudiar el tiempo de ejecución, medido en minutos, de las tareas que recibe un servidor. Considere que los tiempos de ejecución de las sucesivas tareas son independientes y tienen una varianza $\sigma^2 = 0{,}25[mtos.^2]$.

Parte a

Considere que las muestras tomadas son aleatorias y simples.

(i) ¿Cuántas tareas se deben seleccionar si se quiere tener una confianza del 99 % en que la media de la muestra estará a menos de $0{,}4[mtos.]$ de la verdadera media? ¿Es diferente la respuesta si se sabe que la duración de las tareas tiene un comportamiento normal?

(ii) Se han seleccionado 15 tiempos de ejecución de una tarea por el servidor. Cuando se supone que el tiempo tiene comportamiento normal, ¿cuál es la probabilidad de que la diferencia entre las estimaciones insesgadas de media y varianza y los valores reales sea menor a $0{,}1$? Esto es, $\mathbb{P}(|\bar{X}-\mu| \leq 0{,}1)$; $\mathbb{P}(|\tilde{S}^2 - \sigma^2| \leq 0{,}1)$.

Parte b

Suponga que los tiempos de ejecución de las tareas tienen comportamiento normal y se ha obtenido una m.a.s. de 400 tareas de modo que $\bar{X} = 0{,}4[mtos.]$. Considere el test $H_0 : \mu = 0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \mu = 1$.

(i) Encuentre la regla de decisión que minimiza $\beta(\delta) = \mathbb{P}(\text{aceptar } H_0 | H_0 \text{ es falso})$ cumpliendo que $\alpha(\delta) = \mathbb{P}(\text{rechazar} H_0 | H_0 \text{ es verdadero}) \leq 0{,}05$. Además encuentre la regla que minimiza $\beta(\delta)$ cumpliendo que $\alpha(\delta) \leq 0{,}05$ para el test (T') $H_0 : \mu = 1 \quad \text{versus} \quad H_1 : \mu = 0$.

(ii) Encuentre la regla de decisión que minimiza $\alpha(\delta) + \beta'(\delta) = \mathbb{P}(\text{rechazar} H_0 | H_0 \text{ es verdadero}) + \mathbb{P}(\text{aceptar} H_0 | H_1 \text{ es verdadero})$.

(iii) Decida el test de hipótesis para cada uno de los criterios anteriores. ¿Por qué las decisiones son distintas?, ¿ En qué situación conviene considerar cada una de las reglas de decisión?

Pregunta 2

Una empresa de comunicaciones tiene entre sus servicos líneas de acceso a Internet. Estudios anteriores muestran que el tiempo que tarda un usuario en conectarse, denotado X, tiene distribución normal de varianza $0{,}25[segs.^2]$. Además se sabe que la cantidad de intentos, variable denotada Y, que el usuario debe hacer para lograr conectarse sigue distribución geométrica de parámetro p, con $p \in (0,1)$ la probabilidad de conección de un intento.

Parte a

Se desea saber con certeza si el tiempo de acceso medio es inferior a $\mu = 20[segs.]$. Para verificarlo se midió el tiempo hasta el acceso en 25 pruebas aleatorias e independientes obteniendo que $\bar{X} = 20{,}1[segs.]$.

(i) Indique cuál es el contraste de hipótesis adecuado. ¿Se puede aceptar que el tiempo medio que se tarda es inferior a 20 segundos, al nivel de significación $\alpha = 0{,}05$?

(ii) También para $\alpha = 0{,}05$, calcule la probabilidad de aceptar que el tiempo de acceso es superior a 20 segundos cuando el valor real es $19{,}91[segs.]$.

(iii) ¿Qué tamaño de la muestra es necesario para que la probabilidad anterior sea $0{,}2$?

Parte b

Se desea encontrar un intervalo con $95\,\%$ de confianza para el parámetro p de la distribución de Y. Para ello se ha tomado una muestra aleatoria simple en que se mide la cantidad de intentos de 200 usuarios que logran conectarse a Internet. Se obtiene que $\bar{Y} = 3{,}5$.

(i) Con ayuda del Teorema del límite central aproxime un intervalo de confianza de $95\,\%$ del tipo $[-a, a]$ para $Z = \frac{\sqrt{n}(p\bar{Y}-1)}{\sqrt{1-p}}$.

(ii) Deduzca la aproximación de un intervalo de confianza al $95\,\%$ para p.

Indicaciones

- Desigualdad de Chebyshev: Si $E(X) < \infty$ y $\sigma^2 = Var(X) < \infty$ entonces $I\!P(|X-\mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad \forall k > 0$.
- Teorema del límite central: Si $X \sim F$ y $n \to \infty$ entonces $\bar{X} \sim N\big(E(X), \frac{Var(X)}{n}\big)$ cuando $E(X) < \infty$ y $Var(X) < \infty$.
- Si $X \sim Geom(p)$ entonces $I\!P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$, $E(X) = \frac{1}{p}$ y $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$.