

Problemas para Control 3 MA34B-01
Profesor Cátedra: Rodrigo Abt B.
Profesor Auxiliar: Ismael Vergara C.

Dudas, consultas: ivergara@ing.uchile.cl

Repaso Materia

Estadísticos utilizados

- Normal (0,1)

Sea X_1, \dots, X_n m.a.s. tal que $X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$. Entonces $\Rightarrow \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \rightarrow N(0,1)$

- Chi cuadrado

Sea X_1, \dots, X_n m.a.s. tal que $X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$. Entonces $\frac{nS_n^2}{\sigma^2} \rightarrow x_{n-1}^2$ con

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

- T-student

Se forma con una distribución Normal y una Chi-cuadrado .

- Sea $X \rightarrow N(0,1)$ e $Y \rightarrow x_n^2$, con X e Y independientes, $\Rightarrow T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \rightarrow t_n$

- Si $X \rightarrow N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \rightarrow N(0,1)$ y $\frac{nS_n^2}{\sigma^2} \rightarrow x_{n-1}^2$

$$\Rightarrow T = \frac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{nS_n^2}{\sigma^2(n-1)}}} = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n-1}}{S_n} \rightarrow t_{n-1}$$

- F. Fisher

Sea $U \rightarrow x_p^2$, $V \rightarrow x_q^2$ con U y V independientes $\Rightarrow F = \frac{U/p}{V/q} \rightarrow F_{p,q}$ y

$$\frac{1}{F} \rightarrow F_{q,p} \text{ con función densidad igual a : } h(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right) p^{\frac{p}{2}} q^{\frac{q}{2}} y^{\frac{p}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q}{2}\right) (py+q)^{\frac{(p+q)}{2}}} \quad \forall y > 0$$

Test de Hipótesis

- Para realizar un test de hipótesis necesitamos primero que nada una hipótesis nula H_0 , la cual será nuestra hipótesis de trabajo y una hipótesis alternativa H_1 , que es la hipótesis a la cual se confronta.
- Hay distintos tipos de hipótesis: las que podemos dividir en paramétricas (cambia el valor del parámetro, pero no su distribución) y en no paramétricas.
- Una vez que tenemos definidas las hipótesis, necesitamos una regla de decisión (la cual busca disminuir los errores de decisión), para lo cual definimos una región de rechazo de H_0 , W .
- Para lo cual definimos :

α = error tipo I = Probabilidad (rechazar H_0 / H_0 es cierto)

β = error tipo II = Probabilidad (rechazar H_1 / H_1 es cierto)

$\pi(\theta)$ = Función de Potencia = $Prob(rechazar H_0 / \theta) = Prob(x \in W / \theta)$

Es muy útil tener presente lo siguiente:

Sea X_1, \dots, X_n m.a.s. tal que $X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$.

- Al realizar un test con Hipótesis alternativa $H_1: \mu < \mu_0$ el test U.M.P. está dado por $R = \{(x_1, \dots, x_n) : t.q. \bar{x} < c\}$ INDEPENDIENTE de cual sea la hipótesis nula
- Al realizar un test con Hipótesis alternativa $H_1: \mu > \mu_0$ el test U.M.P. está dado por $R = \{(x_1, \dots, x_n) : t.q. \bar{x} > c\}$ INDEPENDIENTE de cual sea la hipótesis nula

- Al realizar un test con Hipótesis alternativa $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$, σ_0^2 cte, el test U.M.P. está dado por $R = \{(x_1, \dots, x_n) t.q. S_n^2 < c\}$ INDEPENDIENTE de cual sea la hipótesis nula
- Al realizar un test con Hipótesis alternativa $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$, σ_0^2 cte, el test U.M.P. está dado por $R = \{(x_1, \dots, x_n) t.q. S_n^2 > c\}$ INDEPENDIENTE de cual sea la hipótesis nula

Sea X_1, \dots, X_{n1} m.a.s. tal que $X \rightarrow N(\mu_1, \sigma_1^2)$.

Sea Y_1, \dots, Y_{n2} m.a.s. tal que $Y \rightarrow N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

- Al realizar un test con Hipótesis alternativa $H_1: \mu_1 < \mu_2$ el test U.M.P. está dado por $R = \{(x_1, \dots, x_{n1}), (y_1, \dots, y_{n2}) t.q. \bar{x} - \bar{y} < c\}$ INDEPENDIENTE de cual sea la hipótesis nula.
- Al realizar un test con Hipótesis alternativa $H_1: \mu_1 > \mu_2$ el test U.M.P. está dado por $R = \{(x_1, \dots, x_{n1}), (y_1, \dots, y_{n2}) t.q. \bar{x} - \bar{y} > c\}$ INDEPENDIENTE de cual sea la hipótesis nula.
- Al realizar un test con Hipótesis alternativa $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$, el test U.M.P. está dado por $R = \left\{ (x_1, \dots, x_{n1}), (y_1, \dots, y_{n2}) t.q. \frac{S_{n1}^2}{S_{n2}^2} < c \right\}$ INDEPENDIENTE de cual sea la hipótesis nula.
- Al realizar un test con Hipótesis alternativa $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$, el test U.M.P. está dado por $R = \left\{ (x_1, \dots, x_{n1}), (y_1, \dots, y_{n2}) t.q. \frac{S_{n1}^2}{S_{n2}^2} > c \right\}$ INDEPENDIENTE de cual sea la hipótesis nula.

Útil, no? En todo caso queda propuesto demostrar que se cumple todo lo anterior, realizando el procedimiento que nos da el test U.M.P.

Para resolver el problema de determinar la constante c utilizando el error tipo I, se aconseja lo siguiente: (Esto se aplica para casos en que los datos vienen de una distribución Normal solamente; los otros casos deben estudiarse en forma particular).

Si van a hacer test sobre medias, independiente si es sobre una o dos poblaciones:

- Si σ^2 es conocido, construyan una $N(0,1)$.
- Si σ^2 es desconocido, construyan una T-Student con los grados de libertad que tiene la χ^2 que utilicen.

Si van a hacer test sobre varianzas:

- Si es para una población solamente, construyan una χ^2 .
- Si es para dos poblaciones, construyan una F de Fisher.

Problemas Resueltos

Problema 1

Se sabe que en una muestra aleatoria de 10 vigas de acero, la resistencia promedio a la composición es :

$$\bar{X}_n = 57.498 \frac{\text{libras}}{\text{pulg}^2}, S_n = 539 \frac{\text{libras}}{\text{pulg}^2}, \quad \text{con} \quad \alpha = 0.01$$

a) Realice el test, suponiendo que $X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$

$$H_0 : \mu = 57.000$$

$$H_1 : \mu < 57.000$$

b) $H_0 : \mu = 57.000$

$$H_1 : \mu \neq 57.000$$

Solución:

a) La región de rechazo , donde se rechaza H_0 es $W = \{\bar{X}_n < C\}$, Por lo tanto, debemos encontrar el valor de C para definir los \bar{X}_n que pertenecen a tal región, para lo cual ocupamos lo siguiente.

$$\alpha = 0.01 = P(\text{rechazar } H_0 / H_0 \text{ cierto}) = P(\bar{X}_n < C / \mu = 57.000)$$

$$\text{como sabemos que } \frac{(\bar{X} - \mu) \cdot \sqrt{n-1}}{S_n} \rightarrow t_{n-1}$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{(\bar{X}_n - \mu) \sqrt{n-1}}{S_n} < \frac{(C - \mu) \sqrt{n-1}}{S_n} / \mu = 57.000 \right) = P(t_9 < \frac{(c - 57.000) \sqrt{9}}{539}) = 0.01$$

$$\Rightarrow P(t_9 < t) = 0.01$$

$$\Rightarrow t = -2.821$$

$$\Rightarrow \frac{(C - 57.000) * 3}{539} = -2.821 \Rightarrow C = 56.493,2$$

Entonces, la región de rechazo queda definida por $W = \{\bar{X}_n < 56.493,2\}$,

como en nuestro caso $\bar{X}_n = 57.498$, $\bar{X}_n \notin W$

\Rightarrow no se rechaza H_0 .

b) si tenemos las siguientes hipótesis $H_0 : \mu = 57.000$
 $H_1 : \mu \neq 57.000$

En este caso la hipótesis alternativa representa a dos casos $\mu < 57.000$ o $\mu > 57.000$.
Por lo tanto, la solución debe considerar ambos casos, para lo cual resolvemos

Test 1

\cup

Test 2

$$H_0 : \mu = 57.000$$

$$H_1 : \mu < 57.000$$

$$W_1 = \{\bar{X}_n < C_1\}$$

$$H_0 : \mu = 57.000$$

$$H_1 : \mu > 57.000$$

$$W_2 = \{\bar{X}_n > C_2\}$$

$$\Rightarrow W = W_1 + W_2 = \{\bar{X}_n < C_1 \cup \bar{X}_n > C_2\}$$

$$\Rightarrow P(\bar{X}_n < C_1) + P(\bar{X}_n > C_2) = 0.01$$

\Rightarrow basta con encontrar C_1 y C_2 con el mismo procedimiento anterior.

Problema 2

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con $\sigma^2 = 25$ y una muestra de tamaño $n=36$. Se construye un test para la hipótesis nula $H_0 : \mu \leq 24$ contra la hipótesis alternativa $H_1 : \mu > 24$.

a) Dé la región crítica del test UMP para un error de tipo I (nivel de significación) $\alpha = 0.05$.

b) Calcule la potencia del test para $\mu = 25$.

c) Si $n=49$, determine el valor de α que permita obtener la misma región crítica que en a).

d) Si $n=49$ y $\alpha = 0.05$, determine el valor de μ que produce la misma potencia que en b).

Solución:

a) La razón de verosimilitudes es monótona en la media muestral \bar{x} (o en $\sum_i x_i$):

$$\text{La función de verosimilitud es: } f_n = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_i (x_i - \mu)^2\right)$$

Luego la razón de verosimilitudes

$$\frac{f_n(x|\mu_1)}{f_n(x|\mu_o)} = \exp\left\{-\frac{1}{\sigma^2}(2(\mu_o - \mu_1)\sum_i x_i + n(\mu_1^2 - \mu_o^2))\right\} \text{ es monótona creciente. Se}$$

puede aplicar el lema de Neyman Pearson para $H_o : \mu = 24$ contra la hipótesis alternativa unilateral $H_1 : \mu > 24$).

$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ con $\sigma^2 = 25$ y $n=36$. La región crítica es de la forma : $\bar{x} \geq c$ con

$$P(\bar{x} \geq c | \mu = 24) = 0.05 \Rightarrow P(z \geq \frac{\sqrt{n}(c - \mu)}{\sigma} | \mu = 24) = 0.05 \text{ en donde}$$

$$z \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}(c - \mu)}{\sigma} = 1.65 \Rightarrow \bar{x} \geq 25.375$$

b) La potencia del test para $\mu = 25$ es:

$$P(\bar{x} \geq c | \mu = 25) = P(z \geq \frac{\sqrt{n}(c - 25)}{\sigma}) = P(z \geq 0.45) = 0.326$$

$$\text{c) Si } n=49; P(z \geq \frac{\sqrt{n}(25.375 - \mu)}{\sigma} | \mu = 24) = 0.0271$$

d) Si $n=49$ y $\alpha = 0.05$,

ahora hay que recalcular la región crítica, pues el n ha cambiado y es función de n . Se obtiene $c = 25.179$

$$P(\bar{x} \geq c | \mu) = P(z \geq \frac{\sqrt{49}(25.179 - \mu)}{5}) = P(z \geq 0.45) = 0.326$$

$$\Rightarrow \mu = 25.179 - \frac{0.45 * 5}{7} = 24.86$$

Problema 3

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con $\sigma^2 = 9$ y una muestra de tamaño $n=36$. Se construye un test para la hipótesis nula $H_0 : \mu = 20$ contra la hipótesis alternativa $H_1 : \mu = 18$.

- a) Dé la región crítica del test más potente para un error $\alpha = 0.01$ de tipo I.
- b) Calcule el error β de tipo II del test.
- c) Si $n=49$, determine el valor de α que permita obtener la misma región crítica que en a). Deduzca β .
- d) Si $n=49$ y $\alpha = 0.01$, determine el valor de μ de la hipótesis alternativa que produce el mismo error β de tipo II que en b)

Solución:

- a) La región crítica más potente del test esta dada por el lema de N.P.:

$$P(\bar{x} \leq c \mid \mu = 20) = 0.01. \text{ Como } \bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{1}{4}\right) \Rightarrow P(N(0,1) \leq 2(c - 20)) = 0.01 \Rightarrow$$

$$2(c - 20) = -2.33 \Rightarrow c = 18.84. \text{ La región crítica es entonces: } \boxed{\bar{x} \leq 18.84}.$$

- b) El error de tipo II es $\beta = P(\bar{x} > 18.84 \mid \mu = 18) = P(N(0,1) > 2(18.84 - 18)) = 0.0465 \Rightarrow$

$$\boxed{\beta = 0.0465}$$

- c)

$$\alpha = P(\bar{x} \leq 18.84 \mid \mu = 20) = P(\sqrt{n}(\bar{x} - 20)/3 \leq \sqrt{n}(18.84 - 20)/3) = P(N(0,1) \leq -2.7) = 0.0035$$

$$\beta = P(\bar{x} > 18.84 \mid \mu = 18) = P(N(0,1) > 7(18.84 - 18)/3) = P(N(0,1) > 1.96) = 0.025$$

$$\boxed{\alpha = 0.0035 \text{ y } \beta = 0.025}$$

- d) Para $n=49$ y $\alpha = 0.01$ se obtiene una región crítica:

$$\alpha = P(\bar{x} \leq c \mid \mu = 20) = P(7(\bar{x} - 20)/3 \leq 7(c - 20)/3) = 0.01. \text{ Es decir } 7(c - 20)/3 = -2.326.$$

Finalmente $c = 19.003$. En el punto b) $\beta = 0.0465$. Si $n = 49$ y $\alpha = 0.01$, el error de tipo

II se escribe:

$$\beta = P(\bar{x} > 19.00 \mid \mu) = P(N(0,1) > 7(19.00 - \mu)/3) = 0.0465. \text{ Es decir que hay que cambiar}$$

la hipótesis alternativa por: $\boxed{\mu = 18.28}$.

Problema 4

Sea $X \sim N(\theta, 1)$, una muestra aleatoria simple de tamaño $n=100$ y una media muestral $\bar{x} = 1.2$. Se efectúan los tests siguientes con un error $\alpha = 0.05$ de tipo I.

- Dé la región crítica más potente para la hipótesis nula $H_0 : \theta = 1$ contra $H_1 : \theta = 1.4$. Concluir.
- Dé la región crítica más potente para la hipótesis nula $H'_0 : \theta = 1.4$ contra $H'_1 : \theta = 1$. Concluir. Calcule los errores de tipo II para los dos tests en a) y b).
- Observe que los resultados de los dos tests son contradictorios. Justifique. Encuentre el tamaño n de muestra mínimo que permite suprimir esta contradicción.
- Si tomamos $n=100$ ¿tendremos una contradicción para el nivel de significación $\alpha = 0.023$?

Solución:

a) $X \sim N(\theta, 1) \Rightarrow \bar{x} \sim N(\theta, \frac{1}{n})$. En el caso de estas hipótesis simples, el lema de Neyman

Pearson nos lleva a una región crítica de la forma $\bar{x} \geq c$ en donde c está determinado por el error de tipo I:

$$P(\bar{x} \geq c | \theta = 1) = 0.05 \Rightarrow P(\sqrt{n}(\bar{x} - 1) \geq \sqrt{n}(c - 1)) = 0.05 \text{ con } \sqrt{n}(\bar{x} - 1) \sim N(0, 1).$$

$$\text{Las tablas nos dan que } \sqrt{n}(c - 1) = 1.65 \Rightarrow c = 1 + \frac{1.65}{\sqrt{n}} = 1.165 \Rightarrow \boxed{\text{se rechaza}}$$

$$\boxed{H_0 : \theta = 1} \text{ dado que } \bar{x} = 1.2.$$

b) En el caso de estas nuevas hipótesis simples, el lema de Neyman Pearson nos lleva a una región crítica de la forma $\bar{x} \geq c'$ en donde c' está determinado por el error de tipo I:

$$P(\bar{x} \leq c' | \theta = 1.4) = 0.05 \Rightarrow P(\sqrt{n}(\bar{x} - 1.4) \leq \sqrt{n}(c' - 1.4)) = 0.05 \text{ con}$$

$$\sqrt{n}(\bar{x} - 1.4) \sim N(0, 1). \text{ Las tablas nos dan que } \sqrt{n}(c' - 1.4) = -1.65 \Rightarrow$$

$$c' = 1.4 - \frac{1.65}{\sqrt{n}} = 1.235 \Rightarrow \boxed{\text{se rechaza } H'_0 : \theta = 1.4}$$

Observamos que en a) y en b) los resultados son opuestos: se rechaza $\theta = 1$ en a) y se rechaza $\theta = 1.4$ en b).

El error de tipo II en a) es igual a:

$$P(\bar{x} < 1.165 | \theta = 1.4) = P(\sqrt{n}(\bar{x} - 1.4) < \sqrt{n}(1.165 - 1.4)) = P(N(0, 1) < -2.35) = 0.0094$$

.

El error de tipo II en b) es igual a:

$$P(\bar{x} > 1.235 | \theta = 1) = P(\sqrt{n}(\bar{x} - 1) > \sqrt{n}(1.235 - 1)) = P(N(0,1) > 2.35) = 0.0094$$

c) Las conclusiones encontradas en a) y b) son opuestas. Para eliminar la contradicción basta tomar n de manera que la región crítica del test de a) sea $\bar{x} \geq 1.2$ y la región crítica del test de b) sea $\bar{x} \leq 1.2$. Entonces se tiene: $P(\bar{x} \geq 1.2 | \theta = 1) = 0.05 \Rightarrow$

$$P(\sqrt{n}(\bar{x} - 1) \geq \sqrt{n}(1.2 - 1)) = P(N(0,1) \geq 0.2\sqrt{n}) = 0.05 \Rightarrow 0.2\sqrt{n} = 1.65 \Rightarrow n=68.$$

3.4 Para el test de a):

$$P(\bar{x} \geq c | \theta = 1) = P(N(0,1) \geq 10(c - 1)) = 0.023 \Rightarrow 10(c - 1) = 2 \Rightarrow c = 1.2$$

Para el test de b):

$$P(\bar{x} \leq c' | \theta = 1.4) = P(N(0,1) \leq 10(c' - 1.4)) = 0.023 \Rightarrow 10(c' - 1.4) = -2 \Rightarrow c = 1.2$$

\Rightarrow No hay contradicción.

Problema 5

Sea una distribución que depende de un parámetro θ y Ω el espacio de parámetros.

Sea la hipótesis nula de $H_0 : \theta \in \Omega_0$ contra la hipótesis alternativa $H_1 : \theta \in \Omega_1$.

- ¿Qué condición deben cumplir Ω_0 y Ω_1 ?
- ¿Qué es la región crítica de un test de hipótesis?
- ¿Qué es una función de potencia? (Define bien el dominio y el recorrido y dé su interpretación).
- ¿Qué es un test uniformemente más potente?
- Un juez tiene que decidir basándose en evidencias si un acusado es culpable. Plantee las hipótesis nula y alternativa para que si el juez condene al acusado sea con bastante seguridad.

Solución:

Sea la hipótesis nula de $H_0 : \theta \in \Omega_0$ contra $H_1 : \theta \in \Omega_1$

- La condición es: $\Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset$.
- La región crítica de un test es la regla de decisión que determina las muestras que llevan a elegir la hipótesis alternativa. (OJO! hay distintas manera de decir lo mismo).
- La función de potencia es una función $\pi : \Omega \rightarrow [0,1]$, con Ω el espacio del parámetro, suponemos llamado θ . La función de potencia es una función θ y es $\pi(\theta) = P(\text{rechazar } H_0 \text{ con la regla de decisión con el valor } \theta \text{ del parámetro})$.

d) Es un test que proporciona una regla de decisión óptima (Máxima potencia) sobre todos los valores de la hipótesis alternativa. Generalmente con una hipótesis alternativa bilateral no existe un test UMP.

e) H_0 : el acusado es inocente, H_1 : el acusado es culpable.

Problema 6

Sea $X \rightarrow p_\theta(x) = (\theta+1)x^\theta \quad x > 0$.

Se tiene una muestra de tamaño 1 ($n=1$)

Se observa que $X=0,63$.

Se propone $H_0 : \theta = 1$
 $H_1 : \theta = 2$

- Encontrar la región de rechazo que minimiza el error tipo II y decida si rechaza H_0 o no. Calcule el error tipo II.
- Dibuje la función de potencia si se propone $R=\{x>0,5\}$

Solución:

a) Ya sea si se está minimizando la combinación lineal de los errores de decisión con α y β dados o fijando α , el procedimiento es el mismo, Neyman-Pearson. De la parte anterior:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{(1+2)x^2}{(1+1)x^1} = \frac{3x^2}{2x} = \frac{3x}{2} > k, \text{ donde } k \text{ es desconocido ahora.}$$

La forma de la región de rechazo es $W = \{ X > C \}$. Para encontrar el valor de C , se usa el error de tipo I:

$$P(\text{Rechazar } H_0 / H_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$P(X > C / \theta = 1) = \alpha = 0,2$$

$$P(X > C / \theta = 1) = 1 - P(X \leq C / \theta = 1) = 1 - F(C / \theta = 1)$$

$$= 1 - C^2 = 0,2 \Rightarrow C = 0,8944$$

Luego, $W = \{ X > 0,8944 \}$ y como $x=0,63 \Rightarrow$ No se rechaza H_0 . El error de tipo II para la decisión anterior es:

$$P(\text{Aceptar } H_0 / H_0 \text{ falsa}) = \beta$$

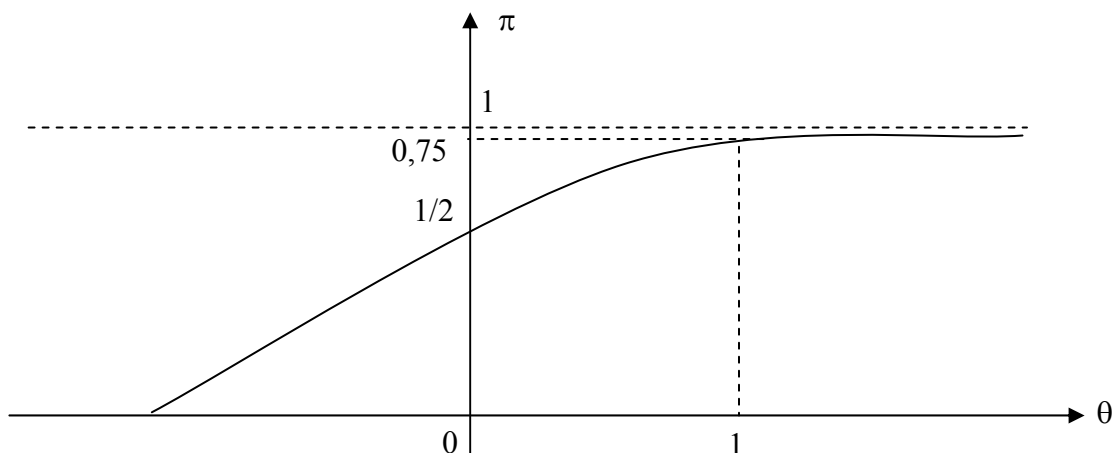
$$P(X \leq 0,8944 / \theta = 2) = \beta$$

$$P(X \leq 0,8944 / \theta = 2) = F(0,8944 / \theta = 2) = (0,8944)^3 = \beta$$

$$\Rightarrow \beta = 0,7155$$

- b) Se tiene un procedimiento para rechazar la hipótesis planteada donde la región de rechazo es $W = \{ X > 0,5 \}$

La función de potencia es entonces: $\pi(\theta) = P(\text{Rechazar } H_0/\theta) = P(X > 0,5/\theta) = 1 - P(X \leq 0,5/\theta) = 1 - F(0,5/\theta) = 1 - (0,5)^{\theta+1}$. Dibujando:



(Luego el tamaño del test es $\alpha = \text{Sup } \pi(\theta) = \pi(1) = 0,75$ ($\theta \in \Omega_0$))

Repaso Materia

Test χ^2

Anteriormente vimos que podíamos hacer test de hipótesis sobre los parámetros de las distintas distribuciones y encontrar un intervalo de confianza donde la probabilidad que tales parámetros estén en ese intervalo sea alta.

Pero también podemos hacer test de hipótesis para comprobar si una variable sigue una cierta distribución, para lo cual utilizamos los Test χ^2 . Este tipo de Test se aplica tanto a distribuciones normal multivariada como a distribuciones multinomial con comportamiento asintótico.

La *distribución multinomial* es una generalización de la distribución binomial. Con la diferencia que en vez de tener 2 alternativas en cada experimento, se tienen k alternativas discretas.

Cada alternativa tiene una probabilidad p_i de ocurrir y ocurre M_i veces con $\sum M_i = n$ y $\sum p_i = 1$.

Además,
$$P(M = m) = P(M_1 = m_1, M_2 = m_2, \dots, M_n = m_n) = \frac{n! p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n}}{m_1! m_2! \dots m_n!}.$$

Entonces se puede construir el estadístico
$$Q = \sum_i \frac{(M_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi^2_{k-1-l},$$
 donde

- n es la cantidad de observaciones o datos
- k es la cantidad de alternativas que puede tomar la variable a analizar (i:1..k)
- l (ele) es el número de estimaciones hechas
- el número 1 de los grados de libertad proviene del hecho que $\sum M_i = n$
- M_i es la cantidad de veces que sale la alternativa i
- p_i es la probabilidad teórica si se cumple la hipótesis H_0 : X sigue una cierta distribución
- np_i es la cantidad de veces que debería salir la alternativa i si se cumple H_0 y $(M_i - np_i)$ es la diferencia entre lo observado y lo teórico.

Una vez calculado el estadístico Q se acepta o rechaza la hipótesis con el siguiente criterio:

$$\text{Si } P(\chi^2_{k-1-l} > Q) < 0.05 \Rightarrow \text{se rechaza } H_0$$

Para el caso de una distribución continua, en vez de tener alternativas discretas tenemos intervalos, donde P_i es la probabilidad que la variable X tome los valores del intervalo. (Ver apuntes del curso para mas antecedentes).

Test de Independencia

Este test se utiliza cuando queremos comprobar si dos variables aleatorias discretas son independientes entre sí. Sean X e Y dos v.a. discretas e independientes entre sí.

Para que sean independientes debe cumplirse que
$$P(X = i, Y = j) = P(X = i) * P(Y = j)$$
 $\forall i, j$

Sean M_{ij} = Frecuencia de observaciones obtenidas

$p_{ij} = P(X = i, Y = j)$ bajo hipótesis de independencia

Entonces $\hat{p}_{ij} = P(X = i) * P(Y = j) = \hat{p}_i * \hat{p}_j$, con $\hat{p}_i = \frac{\sum_j M_{ij}}{n}$ y $\hat{p}_j = \frac{\sum_i M_{ij}}{n}$

\Rightarrow se construye el estadístico

$$Q = \sum_{i,j} \frac{(M_{ij} - n\hat{p}_i\hat{p}_j)^2}{n\hat{p}_i\hat{p}_j} \sim \chi^2_{(p-1)(q-1)}$$

Problemas Resueltos

Problema 1

Se lanza un dado 180 veces y se obtienen los resultados siguientes:

número	1	2	3	4	5	6
frecuencia	28	30	35	26	33	28

Concluya si el dado esta cargado.

Solución:

Si el dado no estuviera cargado debería cumplirse que cada alternativa (número que sale al tirar el dado) tiene la misma probabilidad de ocurrir igual a $1/6$. Por lo que tomaremos como hipótesis

$$H_0 : p_i = \frac{1}{6} \quad \forall i:1..6$$

Para calcular el estadístico Q construye la siguiente tabla:

i	Mi	npi	Mi-npi	(Mi-npi)^2/npi
1	28	30	-2	0,133
2	30	30	0	0,000
3	35	30	5	0,833
4	26	30	-4	0,533
5	33	30	3	0,300
6	28	30	-2	0,133
Suma	180	180	0	1,933

De la tabla $Q = 1.933 \sim \chi^2_{6-1} = \chi^2_5$. Entonces para aceptar o rechazar la hipótesis H_0 , tenemos dos opciones

Alternativa 1) Calcular Q tal que esa $P(\chi^2_5 > Q) = 0.05$

Alternativa 2) Calcular $P(\chi^2_5 > 1.933)$ y ver si es < 0.05

Alternativa 1) El valor de Q para un error de 0.05 es 11.07. Por lo tanto, la región de rechazo esta dada por $R = \{\chi^2_5 > 11.07\}$, como $Q = 1.933$, entonces no pertenece a la región de rechazo y se acepta H_0 .

Alternativa 2) De la tabla tenemos que $P(\chi^2_5 > 1.610) = 0.9$ y

$P(\chi^2_5 > 2.67) = 0.75$. Por lo tanto $P(\chi^2_5 > 1.933) > 0.05 \Rightarrow$ se acepta H_0 .

Entonces se concluye que el dado no estaba cargado.

Problema 2

Los datos siguientes muestran las frecuencias de conteo para 400 observaciones acerca del número de colonias bacterianas por campo en un microscopio, utilizando muestras de una capa delgada de leche:

Nº por campo i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	>9
Frecuencia de observaciones M_i	56	104	80	62	42	27	9	9	5	3	3

2.1 Pruebe la hipótesis de que los datos provienen de una distribución de Poisson con $\alpha = 0.05$.

2.2 ¿Es el p-valor del test mayor o menor que el valor de $\alpha = 0.05$?

Solución:

En este caso $H_0 : X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

Cuando no conocemos el valor del parámetro de la distribución, debemos utilizar el estimador de máxima verosimilitud y quitarle un grado de libertad por cada estimación que hagamos al estadístico Q.

El E.M.V de λ es $\hat{\lambda} = \bar{x}$, con $\bar{x} = \frac{\sum M_i * x_i}{\sum M_i} = 2,4175$ y debemos calcular las probabilidades teóricas.

Para una Poisson la probabilidad que X tome el valor k es $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

i	Mi	Pi	Npi	Mi-npi	(Mi-npi)^2/npi
0	56	0,0891	35,66	20,34	11,605
1	104	0,2155	86,20	17,80	3,675
2	80	0,2605	104,20	-24,20	5,619
3	62	0,2099	83,97	-21,97	5,746
4	42	0,1269	50,75	-8,75	1,508
5	27	0,0613	24,54	2,46	0,247
6	9	0,0247	9,89	-0,89	0,079
7	9	0,0085	3,41	5,59	9,139
8	5	0,0026	1,03	3,97	15,263
9	3	0,0007	0,28	2,72	26,753
>9	3	0,0002	0,09	2,91	99,531
Suma	400	1	400	-6,8E-14	179,1644

De la tabla $Q = 179,1644 \sim \chi^2_{11-1-1} = \chi^2_9$. (Recordemos que hay 11 alternativas y que hay que restarle un grado de libertad por estimar el parámetro λ).

Alternativa 1) El valor de Q para un error de 0.05 es 16,92. Por lo tanto, la región de rechazo esta dada por $R = \{\chi^2_9 > 16,92\}$, como $Q = 179,1644$, entonces pertenece a la región de rechazo y se rechaza H_0 .

Alternativa 2) De la tabla tenemos que $P(\chi^2_9 > 179,1644) \lll 0.05$, entonces se rechaza H_0 .

Problema 3

Se considera la variable X el número de personas que se presentan a la boletería de una estación de metro durante un intervalo de 10 minutos. Se mide esta variable sobre 100 periodos de 10 minutos y se obtuvieron los datos siguientes:

X	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
f	7	9	14	15	17	13	8	6	5	3	2	1

donde f es el número de periodos de 10 minutos para lo cual se encontro X personas en la boletería.

3.1 Calcule el número promedio de personas que se presentan a la boletería en un intervalo de 10 minutos.

3.2 Bajo el supuesto que X sigue una distribución de Poisson, encuentre el estimador de máxima verosimilitud del parámetro λ (Muestre su resultado).

3.3 Haga un test χ^2 para justificar el supuesto que X sigue una distribución de Poisson.

Dé el p-valor y concluye (Necesitan usar las tablas de las distribuciones de Poisson y tablas χ^2).

Solución:

3.1 El promedio se calcula como: $\sum f_i X_i / n = 7.03$

3.2 El EMV de λ es $\hat{\lambda} = \bar{x} = 7.03$

3.3 El $\chi^2 = \sum \frac{(f_i - 100p_i)^2}{100p_i} = 1.94$, el p-valor: $P(\chi_{10}^2 > 1.94) = 0.99$

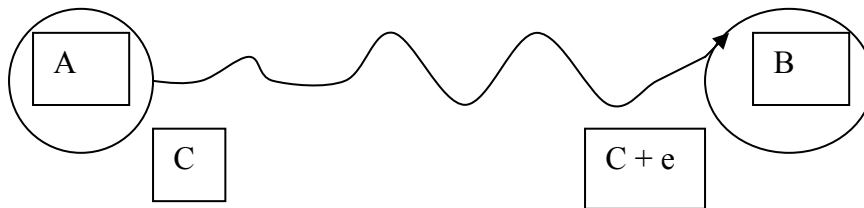
No se rechaza la hipótesis nula que X sigue una distribución de Poisson.

Problema 4

Una señal es enviada de un lugar A a otro B con un valor exacto C. Pero la señal llega a B con valores aleatorios en torno a C, a veces mayores y a veces menores. La explicación es que el ruido que se genera en la transmisión de la señal (e) es de carácter aleatorio, y si no se considera el valor de C, entonces se puede decir que para varios experimentos el valor que toma el ruido es tal que permite construir la siguiente tabla de frecuencias:

clase	frecuencia
$(-\infty; -0,09]$	1
$(-0,09; -0,07]$	0
$(-0,07; -0,05]$	2
$(-0,05; -0,03]$	12
$(-0,03; -0,01]$	8
$(-0,01; 0,01]$	18
$(0,01; 0,03]$	8
$(0,03; 0,05]$	6
$(0,05; 0,07]$	1
$(0,07; \infty)$	1

Estudios anteriores han determinado que la media del ruido es 0 y su desviación típica se puede **estimar** en 0,0314. Contraste la hipótesis de que el ruido sigue una distribución Normal usando los parámetros antes mencionados.



Solución:

El valor de n se obtiene al sumar todas las frecuencias m_i , y en este caso $n=57$. La región de rechazo es de la forma $W = \{Q > c\}$.

El valor de los p_i (probabilidad de caer en el intervalo i) se obtiene haciendo uso de la tabla Normal(0,1), calculando la probabilidad de que un valor cualquiera (llamémoslo e_i para los valores del ruido en el intervalo i) esté en el intervalo de la clase.

Ejemplo:

$$P_2 = P(-0,09 < e_i \leq 0,07) = P\left(\frac{-0,09 - \mu}{S} < \frac{e_i - \mu}{S} \leq -\frac{-0,07 - \mu}{S} \right) \\ = P(-2,866 < Z \leq -2,229)$$

Aproximando la segunda cifra decimal:

$$= P(z > 2,23) - P(Z > 2,87) = 0,0129 - 0,0021 = 0,011 \text{ (de las tablas).}$$

Así, se obtienen los p_i para cada intervalo.

Se construye la siguiente tabla:

Clase	Frecuencia(m_i)	$n \cdot p_i$	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
$(-\infty; -0,09]$	1	0,118	6,565
$(-0,09; -0,07]$	0	0,617	0,617
$(-0,07; -0,05]$	2	20,437	0,078
$(-0,05; -0,03]$	12	6,5	4,654
$(-0,03; -0,01]$	8	11,707	1,174
$(-0,01; 0,01]$	18	14,243	0,991
$(0,01; 0,03]$	8	11,707	1,174
$(0,03; 0,05]$	6	6,5	0,038
$(0,05; 0,07]$	1	2,437	0,847
$(0,07; \infty)$	1	0,735	0,095

Con esto, el valor de $Q = \sum_{i=1}^8 \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$ es 16,234. Como $Q \rightarrow \chi^2_{q-1-l}$

con $q = n^\circ$ de intervalos, $l = n^\circ$ de estimaciones hechas, que en este caso está dado por la restricción $\sum m_i = n$. Por lo tanto, son $10-1-1=8$ grados de libertad.

Mirando la tabla para la χ^2 , obtenemos que

$$P(\chi^2_8 > c) = 0,05 \rightarrow c = 15,51.$$

Como $Q > 15,51$ entonces cae en la región de rechazo y por lo tanto se rechaza la hipótesis de que el ruido siga una distribución normal de media 0 y desviación típica estimada en 0,0314.

Problema 5

Se quiere probar si hay una diferencia de ingreso entre hombres y mujeres médicos. Para lo cual se hizo una encuesta a 200 médicos al azar y de manera independiente obteniéndose la siguiente información:

	Ingreso Bajo	Ingreso Alto	Total
Hombres	20	100	120
Mujeres	70	10	80
Total	90	110	200

Estudie la independencia entre las variables Sexo e ingreso

Solución:

De la tabla podemos ver que

- Probabilidad de ser Hombre $= P_H = \frac{120}{200}$, Probabilidad de ser Mujer $= P_M = \frac{80}{200}$
- Probabilidad de Ingreso Bajo $= P_B = \frac{90}{200}$, Probabilidad de Ingreso Alto $= P_A = \frac{110}{200}$

Entonces, si ambas variables son independientes debe cumplirse que:

- $P_{HB} = P_H P_B = \frac{120}{200} * \frac{90}{200} = 0.27$ (probabilidad que sea hombre y de ingreso bajo)
- $P_{HA} = P_H P_A = \frac{120}{200} * \frac{110}{200} = 0.33$ (probabilidad que sea hombre y de ingreso alto)
- $P_{MB} = P_M P_B = \frac{80}{200} * \frac{90}{200} = 0.18$ (probabilidad que sea mujer y de ingreso bajo)
- $P_{MA} = P_M P_A = \frac{80}{200} * \frac{110}{200} = 0.22$ (probabilidad que sea mujer y de ingreso alto)

Tabla de valores teóricos $n\hat{p}_i\hat{p}_j$

	Ingreso Bajo	Ingreso Alto	Total
Hombres	54	66	120
Mujeres	36	44	80
Total	90	110	200

$$\Rightarrow Q = \sum_{i,j} \frac{(M_{ij} - n\hat{p}_i\hat{p}_j)^2}{n\hat{p}_i\hat{p}_j} = \frac{(20 - 54)^2}{54} + \frac{(100 - 66)^2}{66} + \frac{(70 - 36)^2}{36} + \frac{(10 - 44)^2}{44} = 97.3$$

$$\Rightarrow Q \sim \chi^2_{(p-1)(q-1)} = \chi^2_{(2-1)(2-1)} = \chi^2_{1*1} = \chi^2_1 \quad y$$

$P(\chi^2_1 > 97.3) < 0.05 \Rightarrow$ se rechaza H_0 y las variables Sexo e Ingreso no son independientes.

Problema 6

6.1 Se considera una muestra de 1422 gatitos de 3 razas diferentes R_1 , R_2 y R_3 y 4 atributos diferentes del animal A_1 , A_2 , A_3 y A_4 . Se considera en la tabla 1 las frecuencias de gatitos por raza/atributo. ¿Cómo se llama la tabla 1? Busque mediante un test de hipótesis si existe o no una preferencia de ciertas razas por cierto atributo. Comente.

Tabla 1

	R1	R2	R3	Total
A1	604	42	0	646
A2	302	21	0	323
A3	15	418	0	433
A4	0	0	20	20
Total	921	481	20	1422

6.2 Se construye la tabla 2 sumando las dos primeras filas. Repita el test de la pregunta anterior. Compare los resultados y justifíquelos.

Tabla 2

	R1	R2	R3	Total
A1+A2	906	63	0	969
A3	15	418	0	433
A4	0	0	20	20
Total	921	481	20	1422

Solución:

6.1 La tabla 1 se llama tabla de contingencia. Un test de hipótesis es el de χ^2 de contingencia que mide la distancia entre los datos de frecuencias observados con los de la hipótesis nula de independencia entre raza y atributo. Los datos bajo la hipótesis de independencia entre raza y atributo se obtienen a partir de los márgenes de la

tabla1:
$$m_{ij} = \frac{n_{i.} \cdot n_{.j}}{n}$$

	R_1	R_2	R_3	Total
A_1	418.40	218.51	9.09	646
A_2	209.20	109.26	4.54	323
A_3	280.45	146.46	6.09	433
A_4	12.95	6.77	0.28	20
Total	921	481	20	1422

El estadístico del test es entonces: $Q = \sum_{ij} \frac{(n_{ij} - m_{ij})^2}{m_{ij}}$, que bajo la hipótesis de independencia tiene una distribución aproximada de χ^2 con 6 grados de libertad ($6=(4-1)*(3-1)$).

$\frac{(n_{ij} - m_{ij})^2}{m_{ij}}$	R_1	R_2	R_3
A_1	82,3302516	142,586094	9,08579466
A_2	41,1651258	71,2930472	4,54289733
A_3	251,247444	503,406449	6,09001406
A_4	12,9535865	6,76511955	1382,28129

De la tabla anterior *observamos que Q* toma el valor de **2513.7**.

El pvalor del test se obtiene por: $P(\chi_6^2 > 2513.7)$ que es casi nulo (se puede ver con las tablas que es menor que 1%).

Por tanto para H_0 : El atributo es independiente de la raza, se desecha la independencia. Si se observa que la raza R_3 toma solamente el atributo A_4 y que la raza R_1 prefiere los atributos A_1 y A_2 y la raza R_2 prefiere el atributo A_3 no sorprende este resultado.

6.2 La tabla bajo la hipótesis de independencia:

	R_1	R_2	R_3	Total
A_1+A_2	627.60	327.77	13.63	969
A_3	280.45	146.46	6.09	433
A_5	12.95	6.77	0.28	20
Total	921	481	20	1422

Obtenemos el mismo valor del estadístico **Q=2513.7**. Esto no debería sorprender ya que se sumaron dos filas que eran similares (proporcionales). La diferencia se encuentran en los grados de libertad, que son solamente 4. El p-valor es nulo también.

Problema 7

Se desea estudiar el tiempo de espera en una caja de supermercado a partir de una muestra de clientes durante 3 horas. (tabla).

Tabla: tiempo de espera en minutos de 40 clientes.

5,4 5,1 1,5 3,6 4,2 1,4 1 7,8 4,9 3,4 7,4 5,7 2 8 5,9 9,4 7,4 2,9 0,8 4,8
4 2,4 6,5 8,4 3,4 2,6 4,3 7 2,4 1,4 4,6 4,8 6,5 3,2 4,6 3,7 4,8 8,6 3,2 1

Verifique si la distribución de los tiempos de espera es uniforme en el intervalo $[0,10]$ con un nivel de significación de 5%.

Solución:

Se debe realizar un test χ^2 de ajuste

El procedimiento es dividir el intervalo $[0, 10]$ en q intervalos de largo iguales. Si la distribución es uniforme, la frecuencias de clientes por intervalo debería ser la misma. Se presentan aquí los resultados para varias particiones ($q = 4, 5$ ó 6). Si m_i es la frecuencia observada y f_i la frecuencia teórica en el intervalo i bajo el supuesto de distribución

uniforme el estadístico del test es: $Q = \sum_{i=1}^q \frac{(m_i - f_i)^2}{f_i}$ que sigue aproximadamente una distribución de χ^2_{q-1} . (gl: N° intervalos – 1).

$q=4$	m_i	f_i	$m_i - f_i$	$(m_i - f_i)^2 / f_i$
$[0, 2.5]$	9	10	-1	0.1
$]2.5, 5]$	17	10	7	4.9
$]5, 7.5]$	9	10	-1	0.1
$]7.5, 10]$	5	10	-5	2.5
Total	40	40	0	7.6

$q=5$	m_i	f_i	$m_i - f_i$	$(m_i - f_i)^2 / f_i$
$[0, 2]$	7	8	-1	0.125
$]2, 4]$	11	8	3	1.125
$]4, 6]$	12	8	4	2
$]6, 8]$	7	8	-1	0.125
$]8, 10]$	3	8	-5	3.125
Total	40	40	0	6.5

$q=6$	m_i	f_i	$m_i - f_i$	$(m_i - f_i)^2 / f_i$
[0, 1.667]	6	6.6667	-0.667	0.0667
]1.667 3.334]	7	6.6667	0.334	0.0167
]3.334, 5]	13	6.6667	6.334	6.0167
]5, 6.667]	6	6.6667	-0.667	0.0667
]6.667, 8.334]	5	6.6667	-1.667	0.4167
]8.334, 10]	3	6.667	-3.667	2.0167
Total	40	40	0	8.6

Resumen:

q	Q	Grados libertad	p-valor
4	7.6	3	0.055
5	6.5	4	0.165
6	8.6	5	0.126

Con un error de tipo I de 5% no se rechaza que es una distribución uniforme en $[0,10]$.