28.08.2006 **PAUTA CONTROL 1** MA 34B

Duración: 2:30horas R. Assar, N.Lacourly, A. Peña

Pregunta 1

Parte a

(i) El momento de orden k de la distribución Potencia(α,θ), se calculan de la siguiente manera:

$$\mathbb{E}[X^k] = \int_0^\theta x^k f(x)dx = \int_0^\theta \frac{\alpha+1}{\theta^{\alpha+1}} x^{\alpha+k} dx; \quad k = 1,2,3,\ldots$$

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{(\alpha+1)x^{\alpha+k+1}}{(\alpha+k+1)\theta^{\alpha+1}} \Big|_0^\theta = \frac{(\alpha+1)}{\alpha+k+1}\theta^k$$

(ii) Se deduce

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha+1}{\alpha+2}\theta \;\; y \;\; Var[X] = \frac{\alpha+1}{(\alpha+3)(\alpha+2)^2}\theta^2$$

(iii) Además el estimador $\widehat{\theta}_{MM})$ de θ es $\widehat{\theta}_{MM}) = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}\bar{x}$

$$\mathbb{E}(\widehat{\theta}_{MM}) = \theta \;\; y \;\; V(\widehat{\theta}_{MM}) = \frac{(\alpha+2)^2}{(\alpha+1)^2}\frac{V(X)}{n} = \frac{\theta^2}{(\alpha+1)(\alpha+3)}$$

(iv) $ECM(\widehat{\theta}_{MM}) = V(\widehat{\theta}_{MM}) + (\mathbb{E}(\widehat{\theta}_{MM})^2 = \frac{\theta^2}{(\alpha+1)(\alpha+3)}$.

Este estimador es insesgado y su varianza tiende a 0. Se deduce que converge en media cuadrática hacia θ y es entonces consistente.

Parte b

(i) El estimador de máximo verosimilitud maximiza la densidad conjunto de los valores muestrales o función de verosimilitud:

$$f_n(x_1,...x_n|\theta) = \frac{(\alpha+1)^n x_1^\alpha ... x_n^\alpha}{\theta^{n(\alpha+1)}} \quad 0 \le x_i \le \theta$$

$$log(f_n(x_1,...x_n|\theta)) = nlog(\alpha+1) + \alpha \sum log(x_i) - n(\alpha+1)log(\theta) \quad \theta \ge max\{x_i\}$$

Esta función es nula hasta $max\{x_i\}$ y decreciente a partir de $max\{x_i\}$. Luego se obtiene el óptimo en $\widehat{\theta}_{MV} = max\{x_i\}$.

(ii) Las funciones de distribución y de densidad del $\widehat{\theta}_{MV}$ son:

$$G(t) = F(t)^n \;, \;\; g(t) = n(F(t))^{n-1}f(t) = n\frac{(\alpha+1)t^{n(\alpha+1)}}{\theta^{n(\alpha+1)}}$$

$$\Rightarrow \widehat{\theta}_{MV} \sim Potencia(n\alpha+n-1,\theta)$$

(iii) $\mathbb{E}(\widehat{\theta}_{MV}) = \frac{n\alpha+n}{n\alpha+n+1}\theta$ y $V(\widehat{\theta}_{MV}) = \frac{n\alpha+n}{(n\alpha+n+2)(n\alpha+n+1)^2}\theta$.

Se observa que el estimador es sesgado con un sesgo igual a $S(\widehat{\theta}_{MV}) = \mathbb{E}(\widehat{\theta}_{MV}) - \theta = \frac{n\alpha+n}{n\alpha+n+1}\theta = \frac{1}{n\alpha+n+1}\theta$. Lo que significa que subestima el parámetro θ.

El error cuadrático medio es:

$$ECM(\widehat{\theta}_{MV}) = V(\widehat{\theta}_{MV}) + S(\widehat{\theta}_{MV})^2 = \frac{2\theta^2}{(n\alpha+n+1)(n\alpha+n+2)}$$

(iv) El estimador $\widehat{\theta}_{MV}$ tiene un sesgo y su varianza que tienden a 0 cuando n crece. Se deduce que converge en media cuadrática hacia θ y es entonces consistente.

Pregunta 2

0.1. Parte a

(i) Se reemplaza $2\beta^2$ por α en la expresión de la función de densidad.

Sea el cambio de variable $y = x^2$, entonces $dy = 2xdx$ de donde se deduce que la función de densidad de la variable Y es $h(y) = \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{y}{\alpha}} \;\; y > 0$.

(ii) Como $\mathbb{E}(Y) = \alpha$, luego $\hat{\alpha} = \frac{1}{n}\sum y_i = \frac{1}{n}\sum x_i^2$.

(iii) $\mathbb{E}(\hat{\alpha}) = \alpha$ y $V(\alpha) = \frac{V(Y)}{n} = \frac{\alpha^2}{n}$

(iv) El estimador $\hat{\alpha}$ es insesgado y su varianza tiende a 0, luego tiende hacia α en media cuadrática y es consistente.

Parte b

(i) Si $y_i = x_i^2$, la función de verosimilitud se escribe:

$$f_n = \frac{1}{\alpha^n}exp(-\frac{\sum y_i}{\alpha})$$

$$logf_n = -nlog(\alpha) - \frac{\sum y_i}{\alpha}$$

$$\frac{\partial f_n}{\alpha} = -\frac{n}{\alpha} + \frac{\sum y_i}{\alpha^2})$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n}$$

(ii) Usando la propiedad de invarianza en $\beta = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}$, se obtiene el estimador de máxima verosimilitud de β: $\hat{\beta} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{2n}}$.

(iii) Usando la distribución exponencial de Y, obtenemos la cantidad de información de Fisher: $I(\alpha) = -\mathbb{E}(\frac{\partial^2 log(f(y))}{\partial\alpha^2})$ con $f(y) = \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{y}{\alpha}}$.

$$\frac{\partial log(f_n)}{\partial\alpha} = -\frac{1}{\alpha} + \frac{y}{\alpha^2}$$

$$\frac{\partial^2 log(f_n)}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2y}{\alpha^3}$$
$$I(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2}$$

La cota de Cramer-Rao es entonces $C = \frac{1}{nI(\alpha)} = \frac{\alpha^2}{n}$.

(iv) Concluimos, de lo anterior y (a) (iii), que $\hat{\alpha}$ es un estimador insesgado de mínima varianza para α.