

## Pregunta 1

Sea  $\{X_1, \dots, X_n\}$  una muestra aleatoria simple de la distribución Potencia( $\alpha, \theta$ ), con función de densidad dada por

$$f(x; \theta, \alpha) = \frac{(\alpha + 1)x^\alpha}{\theta^{\alpha+1}}, \quad 0 < x \leq \theta;$$

donde  $\alpha$  es conocido,  $\theta$  es desconocido y  $\theta > 0$  y  $\alpha > -1$ .

### Parte a

- (i) Muestre que  $\mathbb{E}[X^k] = \frac{\alpha+1}{\alpha+k+1} \theta^k$ ;  $k = 1, 2, \dots$
- (ii) Deduzca  $\mathbb{E}[X]$  y  $Var[X]$ .
- (iii) Obtenga el estimador de los momentos  $\hat{\theta}_{MM}$  para  $\theta$ . Calcule el sesgo  $S(\hat{\theta}_{MM})$  y la varianza  $V(\hat{\theta}_{MM})$  de  $\hat{\theta}_{MM}$ .
- (iv) Calcule el error cuadrático medio  $ECM(\hat{\theta}_{MM})$  de  $\hat{\theta}_{MM}$  y verifique su consistencia.

### Parte b

- (i) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud  $\hat{\theta}_{MV}$  para  $\theta$ .
- (ii) Calcule las funciones de distribución y de densidad de  $\hat{\theta}_{MV}$ . Verifique que  $\hat{\theta}_{MV}$  tiene una distribución de Potencia.
- (iii) Calcule el sesgo  $S(\hat{\theta}_{MV})$ , la varianza  $V(\hat{\theta}_{MV})$ , el error cuadrático medio  $ECM(\hat{\theta}_{MV})$ .
- (iv) Verifique la consistencia de  $\hat{\theta}_{MV}$  y encuentre  $c \in \mathbb{R}$  de modo que  $c\hat{\theta}_{MV}$  sea insesgado.

## Pregunta 2

Sea  $\{X_1, \dots, X_n\}$  una muestra aleatoria de la distribución Rayleigh de parámetro  $\beta$ , con densidad dada por  $f(x; \beta) = \frac{1}{\beta^2} x e^{-x^2/2\beta^2}$ ,  $x > 0$ .

### Parte a

- (i) Muestre que la densidad de la distribución de Rayleigh puede escribirse en función de  $\alpha$  donde  $\alpha = 2\beta^2$ :

$$f(x; \alpha) = \frac{2}{\alpha} x e^{-x^2/\alpha}, \quad x > 0, \text{ donde } \alpha > 0$$

y deduzca que si  $X$  se distribuye Rayleigh de parámetro  $\alpha$ , entonces  $X^2$  se distribuye exponencial de media  $\alpha$ .

- (ii) Mediante el método de los momentos encuentre un estimador  $\hat{\alpha}$  para  $\alpha$ .

- (iii) Calcule la esperanza y la varianza de  $\hat{\alpha}$ .
- (iv) Verifique si el estimador  $\hat{\alpha}$  de  $\alpha$  es consistente.

**Parte b**

- (i) Muestre que el estimador de máxima verosimilitud de  $\alpha$  es igual a  $\hat{\alpha}$ .
- (ii) Deduzca el estimador de máxima verosimilitud de  $\beta$ .
- (iii) Encuentre la cota inferior de Cramer-Rao para la varianza de todo estimador insesgado de  $\alpha$ .
- (iv) Verifique si  $\hat{\alpha}$  es de mínima varianza entre los estimadores insesgados de  $\alpha$ .