Pauta Control N°1 MA34A-3 Estadística
Profesor Alexis Peña
Auxiliares Diego Díaz, Natalia Rodriguez

1. Las variables aleatorias mutuamente independientes, $X \sim N(\mu_1, \sigma^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ y $W \sim N(\mu_3, \sigma^2)$, representan las ventas por mayor, las ventas al detalle y los costos fijos, repectivamnete, de una cierta industria textil.

   (a) *Si $\sigma^2 = 6$, determine el tamaño muestral necesario de manera que se estime la media μ_1 usando $\overline{X}_n$, con un error máximo de 0.1 y una probabilidad mínima de 0.90.*
   Se quiere que
   $$P(a < \bar{x} - \mu_1 < b) \geq 0.9$$
   Formemos una $N(0,1)$
   $$P\left(a < \frac{\bar{x} - \mu_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < b\right) \geq 0.9$$
   $$\Rightarrow b = 1.64,\ a = -1.64$$
   $$\Rightarrow P\left(\frac{a}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < \bar{x} - \mu_1 < \frac{b}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) \geq 0.9$$
   Y se quiere que
   $$\Rightarrow 1.64\sqrt{\sigma^2}n \leq 0.1$$
   Con lo que
   $$n \geq 1613$$
   Suponga ahora que σ^2 es desconocido y que para cinco períodos semanales consecutivos se dispone de las respectivas medias y varianzas muestrales, expresado en las unidades que corresponden:
   Ventas por mayor: $\overline{x} = 10.50$; $\quad s_1^2 = 6.41$.
   Ventas al detalle: $\overline{y} = 8.40$; $\quad s_2^2 = 4.76$.
   Costos fijos: $\overline{w} = 6.12$; $\quad s_3^2 = 5.15$.

   (b) *¿Son las ventas al por mayor y al detalle de igual magnitud?.*
   Use una confianza de 95%.
   $$IC(\mu_1 - \mu_2; 0.95)$$
   $$\Rightarrow P(a < \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{n}}} < b) = 0.95$$
   Pero
   $$P(a < \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{n}}} < b) = P(a < t_{2n-2} < b) = P(a < t_8 < b) = 0.95$$

$$\Rightarrow b = 2.306,\ a = -2.36 \text{ (por simetría)}$$

$$\Rightarrow \mu_1 - \mu_2 \in \left(\bar{x} - \bar{y} - 2.306\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{n}},\ \ \bar{x} - \bar{y} + 2.306\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{n}} \right)$$

$$\Rightarrow \mu_1 - \mu_2 \in \left(-1.34,\ 5.54 \right)$$

No son de igual magnitud.

(c) *¿Es posible afirmar que la utilidad media de esta industria es del orden de 10 unidades monetarias?. Use una confianza de 95%.*

<u>Indicación:</u> Utilidad = Ingresos – Costos.

$$\frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2_\nu}{\nu}}} \to t_\nu$$

$$\frac{\bar{x} + \bar{y} - \bar{w} - (\mu_1 + \mu_2 - \mu_3)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m} + \frac{\sigma^2}{r}}} \to N(0,1)$$

Formemos la χ^2_ν, sabemos que

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{(n-1)}$$

Ojo que si se define $S = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$ entonces se usa

$$\frac{(n)S^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{(n-1)}$$

Pero la χ^2 sigue siendo de $n-1$ grados de libertad. Así

$$\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2 + (r-1)S_3^2}{\sigma^2(n+m+r-3)}(n+m+r-3) \to \chi^2_{(n+m+r-3)}$$

Entonces

$$\frac{\bar{x} + \bar{y} - \bar{w} - (\mu_1 + \mu_2 - \mu_3)}{\sqrt{S_{p3}(n+m+r-3)}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{r}}} \to t_{(n+m+r-3)}$$

Luego

$$P\left(\frac{\bar{x} + \bar{y} - \bar{w} - b}{\sqrt{S_{p3}(n+m+r-3)}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{r}}} < t_{(n+m+r-3)} < \frac{\bar{x} + \bar{y} - \bar{w} - a}{\sqrt{S_{p3}(n+m+r-3)}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{r}}} \right)$$

$$= 0.95$$

Así

$$P\left(t_{(n+m+r-3)} > \frac{\bar{x}+\bar{y}-\bar{w}-b}{\sqrt{S_{p3}(n+m+r-3)}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{r}}}\right) = 0.025$$

Y

$$P\left(t_{(n+m+r-3)} > \frac{\bar{x}+\bar{y}-\bar{w}-a}{\sqrt{S_{p3}(n+m+r-3)}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{r}}}\right) = 0.975$$

Tomando $n = m = r = 5 \Rightarrow n+m+r-3 = 12$ *y viendo los valores de tabla se obtiene:*

$$\frac{\bar{x}+\bar{y}-\bar{w}-b}{\sqrt{S_{p3}(n+m+r-3)}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{r}}} = -2.179$$

y

$$\frac{\bar{x}+\bar{y}-\bar{w}-a}{\sqrt{S_{p3}(n+m+r-3)}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{r}}} = 2.179$$

Así

$$\frac{10.5+8.4-6.12-b}{\sqrt{S_{p3}(12)}\sqrt{\frac{3}{5}}} = -2.179$$

y

$$\frac{10.5+8.4-6.12-a}{\sqrt{S_{p3}(12)}\sqrt{\frac{3}{5}}} = 2.179$$

Por otro lado

$$S_{p3} = \frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2+(r-1)S_3^2}{n+m+r-3}$$

Con lo que

$$\frac{10.5+8.4-6.12-b}{\sqrt{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2+(r-1)S_3^2}\sqrt{\frac{3}{5}}} = -2.179$$

y

$$\frac{10.5+8.4-6.12-a}{\sqrt{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2+(r-1)S_3^2}\sqrt{\frac{3}{5}}} = 2.179$$

Reemplazando $n = m = r = 5$

$$\frac{10.5+8.4-6.12-b}{\sqrt{(4)S_1^2+(4)S_2^2+(4)S_3^2}\sqrt{\frac{3}{5}}} = -2.179$$

y

$$\frac{10.5+8.4-6.12-a}{\sqrt{(4)S_1^2+(4)S_2^2+(4)S_3^2}\sqrt{\frac{3}{5}}} = 2.179$$

Así finalmente:

$$b = 2.4$$

y

$$a = 1.7$$

Con lo que las utilidades de la empresa no son del orden de 10 unidades monetarias.

2. Sea $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ muestra aleatoria proveniente de la distribución de Normal de media 0 y varianza ϕ^{-1}, i.e., $N(0, \phi^{-1})$, donde $\phi > 0$. ϕ es la precisión de la población.

   En los items (b), (d), (e), (f) y (g), Ud. debe considerar como datos
   $n = 10;\quad \sum x_i = 2.125;\quad \sum x_i^2 = 40.045.$

   (a) Muestre que $\phi \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2$.
   Dos formas:

   1. *Por FGM (función generadora de momentos).*

$$E\left(e^{(\phi \sum_{i=1}^{n} x_i^2)t}\right) = E\left(\prod_{1}^{n} e^{(\phi x_i^2)t}\right)$$

   x_i *no son identicamente distribuidas pero SI independientes*

$$\Rightarrow E\left(\prod_{1}^{n} e^{(\phi x_i^2)t}\right) = \prod_{1}^{n} E\left(e^{(\phi x_i^2)t}\right)$$

$$E\left(e^{(\phi x_i^2)t}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\phi x_i^2)t} \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\phi}{2} x_i^2} dx_i = \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\phi x_i^2 t} e^{\frac{-\phi}{2} x_i^2} dx_i$$

$$= \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_i^2(-t\phi + \frac{\phi}{2})} dx_i = \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{(\frac{\phi}{2} - \phi t)}} = \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{(\frac{\phi - 2\phi t}{2})}}$$

$$= \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{\sqrt{(\phi - 2\phi t)}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{\phi - 2\phi t}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2t}}$$

$$\Rightarrow \prod_{1}^{n} E\left(e^{(\phi x_i^2)t}\right) = \frac{1}{(1 - 2t)^{\frac{n}{2}}}$$

   Y esta es la FGM de una χ_n^2.

   2. *Por lo visto en clases*

$$X_i \to N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \to N(0,1) \Rightarrow Z_i^2 \to \chi_1^2$$

   Además

$$V \to \chi_a^2 y W \to \chi_b^2 \Rightarrow V + W \to \chi_{a+b}^2$$

Usando esto se tiene

$$X_i \to N(0,\phi^{-1}) \Rightarrow Y_i = \frac{X_i}{\sqrt{\frac{1}{\phi}}} \to N(0,1) \Rightarrow Y_i^2 = \phi X_i^2 \to \chi_1^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \phi \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \to \chi_n^2$$

(b) *Determine el estimador de máxima verosimilitud de ϕ.*

$$f(\bar{X},\phi) = \frac{\phi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\phi \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2}}$$

Se aplica $ln()$

$$ln(f(\bar{X}),\phi)) = ln\left(\frac{\phi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\phi \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2}}\right) = \frac{n}{2}ln(2\pi) + \frac{n}{2}ln(\phi) - \frac{\phi \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2}$$

Maximizando la función

$$\frac{\partial ln(f(\bar{X}),\phi))}{\partial \phi} = \frac{n}{2\phi} - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{\phi} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

Es el EMV de ϕ.

(c) *Muestre que el estimador de máxima verosimilitud de ϕ es consistente.*

Dos formas

1. *Si la esperanza tiende al estimador y la varianza a cero entonces es consistente. Calculemos por la FGM la distribución de X_i^2*

$$E\left(e^{X_i^2 t}\right) = \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{X_i^2 t} e^{\frac{-\phi}{2} X_i^2} dx_i = \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X_i^2(\frac{\phi}{2}-t)} dx_i$$

$$= \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{(\frac{\phi}{2}-t)}} = \left(\frac{\frac{\phi}{2}}{\frac{\phi}{2}-t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow X_i^2 \to Gamma(\frac{1}{2},\frac{\phi}{2})$$

$$\Rightarrow E(X_i^2) = \phi \;\; y \;\; Var(X_i^2) = \frac{2}{\phi^2}$$

Veamos ahora qué pasa con $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = E(X_i^2) = \phi$$

Luego la esperanza es igual al parámetro estimado. Veamos la varianza

$$Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i^2) = \frac{1}{n^2} nVar(X_i^2) = \frac{1}{n}\frac{2}{\phi^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Entonces la varianza tiende a cero a medida que n *crece. Entonces el estimador es consistente.*

2. *Por la desigualdad de Chebyshev*

$$P(|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon) \leq Var(\hat{\theta})\epsilon^2$$

(d) *Determine un intervalo de* 95% *de confianza para* ϕ.
Se quiere

$$P(a < \phi < b) = 0.95 \Leftrightarrow P\left(a\sum_{i=1}^{n} X_i^2 < \phi\sum_{i=1}^{n} X_i^2 < b\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left(a\sum_{i=1}^{n} X_i^2 < \chi_n^2 < b\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\chi_n^2 > b\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = 0.025 \quad y \quad P\left(\chi_n^2 > a\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = 0.975$$

$$IC(\phi, 0.95) = \left(\frac{\chi^2_{(n,0.975)}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}, \frac{\chi^2_{(n,0.025)}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\right) = \left(\frac{\chi^2_{(10,0.975)}}{40.045}, \frac{\chi^2_{(10,0.025)}}{40.045}\right)$$

$$= (\frac{3.5}{40.045}, \frac{20.5}{40.045}) = (\frac{3.5}{40.045}, \frac{20.5}{40.045}) = (0.09, 0.5)$$

(e) *Suponga una priori gamma para* ϕ, *i.e.,* $\pi(\phi) = \frac{1}{\Gamma(r)}\lambda^r\phi^{r-1}e^{-\lambda\phi}, \quad \phi > 0$, *donde* $r, \lambda > 0$ *son conocidos. Muestre que esta priori es conjugada y calcule el estimador de Bayes de* ϕ *bajo pérdida cuadrática.*
Utilizan do el teorema de Bayes se tiene que la distribucin a posteriori

$$\begin{aligned} \pi(\phi|\boldsymbol{X}) &\propto L(\phi) * \pi(\theta) \\ &\propto \phi^{n/2+r-1}\exp\{-\phi\frac{(\sum x_i^2 + \lambda)}{2}\} \end{aligned}$$

lo cual muestra que la posteriori pertenece a la misma familia de la priori, es conjugada con parmetros $n/2 + r$ *y*
$\frac{\sum x_i^2 + \lambda}{2}$
El estimador de Bayes bajo prdida cuadrtica es
$\mathbb{E}(\phi|\boldsymbol{X}) = \frac{n/2+r}{\sum x_i^2 + \lambda}$

(f) *Suponga ahora la priori no-informativa $\pi(\phi) \propto [I(\phi)]^{1/2}$, donde $I(\phi)$ es la información de Fisher de ϕ asociada a una observación X. Encuentre el estimador de Bayes bajo pérdida cuadrática de ϕ. Compare con lo obtenido en (a).*

$I[\phi] = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial_2 l(\phi)}{\partial \phi}\right]$
y

$$\phi(\theta) \propto 1/\phi$$

Luego en forma anloga al ejercicio anterior, utilizando el th de bayes se tiene que

$$\pi(\phi|\boldsymbol{X}) \propto \phi^{n/2-1} \exp\{-\phi \frac{(\sum x_i^2}{2}\}$$

con lo cual

$\phi|\boldsymbol{X} \sim Gamma(n/2, \sum x_i^2)$
luego el estimador Bayesiano bajo prdida cuadrtica, coincide con el estimador mximo verosmil
$\mathbb{E}(\phi|\boldsymbol{X}) = \frac{n}{\sum x_i^2}$

3. Suponga que $y_1, \ldots, y_n \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ independientes, donde $\mu_i = \beta x_i$ con x_i constantes conocidas respectivas a cada y_i. (Note que las variables no son idnticamente distribuidas)

   (a) *Encuentre el estimador mximo verosmil de β y σ^2.*

$$f(\bar{Y}, \beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(y_i - \mu_i)^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^n} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\sum_{i=1}^n y_i \mu_i + \sum_{i=1}^n \mu_i^2\right)}$$

Aplicando $ln()$

$$ln(f(\bar{Y}, \beta)) = \frac{-n}{2} ln(2\pi) - n ln(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta \sum_{i=1}^n y_i x_i + \beta^2 \sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

Maximizando en función de β

$$\frac{\partial ln(f(\bar{Y}, \beta))}{\partial \beta} = -\sum_{i=1}^n y_i x_i + \beta \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Maximizando en función de σ

$$\frac{\partial ln(f(\bar{Y},\beta))}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\Bigg(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^{n} y_i x_i + \beta^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Bigg) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}x_i)^2}{n}$$

(b) *Construya un intervalo de confianza de nivel $(1-\alpha)$ para β suponiendo $\sigma^2 = 1$ y σ^2 desconocido.*

Sea $c = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{c} = \frac{1}{c}(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)$$

$$\Rightarrow E(\hat{\beta}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i E(y_i)}{c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i}{c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \beta}{c} = \beta$$

$$\Rightarrow Var(\hat{\beta}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 Var(y_i)}{c^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma^2}{c^2} = \frac{\sigma^2}{c}$$

Luego

$$\hat{\beta} \to N\Bigg(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\Bigg)$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}} \to N\Bigg(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\Bigg)$$

Luego, queremos a, b tal que

$$P(a < \beta < b) = 1-\alpha \Leftrightarrow P(-a > -\beta > -b) = 1-\alpha \Leftrightarrow P(-b < -\beta < -a) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\hat{\beta}-b}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}} < \frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}} < \frac{\hat{\beta}-a}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\Bigg(N_{(0,1)} > \frac{\hat{\beta}-a}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}}\Bigg) = \frac{\alpha}{2} \quad \wedge \quad P\Bigg(N_{(0,1)} > \frac{\hat{\beta}-b}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}}\Bigg) = 1-\frac{\alpha}{2}$$

Así

$$N_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\hat{\beta}-a}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}}$$

$$N_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{\hat{\beta}-b}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}}$$

$$\Rightarrow a = -N_{(\frac{\alpha}{2})}\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} + \hat{\beta}$$

$$\wedge \quad b = -N_{(1-\frac{\alpha}{2})}\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} + \hat{\beta}$$

Esto es IC para σ^2 conocido. Ahora veamos IC para σ^2 desconocido:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - E(y_i))^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}x_i)^2}{n-1} = \hat{\sigma^2}$$

Se sabe que

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{(n-1)} \quad y \quad \frac{N_{(0,1)}}{\sqrt{\frac{\chi^2_n}{n}}} \to t_n$$

Así

$$\frac{\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}}}{\sqrt{\frac{(n-1)\hat{\sigma^2}}{\sigma}}} \to t_{n-1}$$

$$P(a < \beta < b) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(t_{(n-1)} > \frac{\hat{\beta} - a}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}}\right) = \frac{\alpha}{2} \quad \wedge \quad P\left(t_{(n-1)} > \frac{\hat{\beta} - b}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow a = -t_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} + \hat{\beta}$$

$$\wedge \quad b = -t_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} + \hat{\beta}$$

(c) *Realice un grfico para cada valor estimado de μ_i versus x_i y el intervalo respectivo derivado a partir de b). ($\alpha = 0.05$) y los datos:*

x	*2*	*2*	*3*	*4*	*4*
y	*5*	*6*	*9*	*11*	*13*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 49 \quad , \quad \hat{\beta} = 2.96$$

$$P(a < \beta < b) = 0.95 \Rightarrow P(a < \frac{\mu_i}{x_i} < b) = 0.95 \Rightarrow (*)\ P(ax_i < \mu_i < bx_i) = 0.95$$

Con

$$a = 2.68 \quad y \quad b = 3.24$$

Reemplazando en (*) para $X = 2, 2, 3, 4, 4$

$$P(5.36 < \mu_i < 6.48) \quad \textit{si x=2, i=1,2} \quad \wedge \quad \hat{\mu_1} = \hat{\mu_2} = 5.92$$

$$P(8.04 < \mu_3 < 9.72) \quad \textit{si x=3} \quad \wedge \quad \hat{\mu_3} = 8.88$$

$$P(10.72 < \mu_i < 12.96) \quad \textit{si x=4, i=4,5} \quad \wedge \quad \hat{\mu_i} = 11.84$$

Gráficando estos valores con sus intervalos se tiene: