

Problema 1

- (a) La función de densidad del voltaje es: 1 si $x \in [\theta, \theta + 1]$.

$$\text{Luego } E(\bar{x}) = \int_{\theta}^{\theta+1} x dx = \frac{1}{2}[(\theta + 1)^2 - \theta^2] = \theta + \frac{1}{2}.$$

Se concluye \bar{x} tiene un sesgo positivo igual a $1/2$. No es asintóticamente insesgado.

- (b) El estimador $\hat{\theta} = \bar{x} - 1/2$ es insesgado y $\text{Var}(\hat{\theta}) = \text{Var}(\bar{x}) = \frac{\text{Var}(x)}{n} = \frac{1}{12n}$.

- (c) Luego $ECM(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) = \text{Var}(\bar{x}) = \frac{1}{12n}$ y $ECM(\bar{x}) = \text{Var}(\bar{x}) + \frac{1}{4} = \frac{1}{12n} + \frac{1}{4}$.

Se concluye que el estimador insesgado es mejor para el criterio ECM.

Problema 2

- (a) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Luego, $\bar{x} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ y $\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

\bar{x} no difiera del verdadero valor μ en más de $0,7h$ con una probabilidad de 95 % significa que

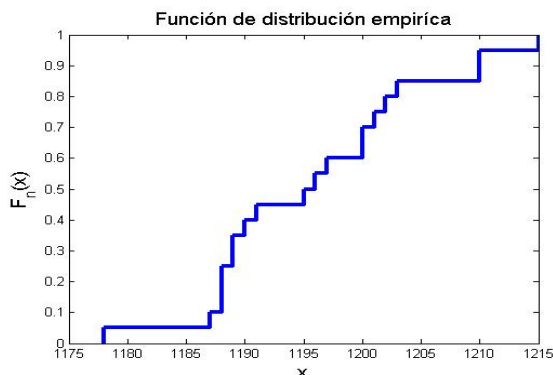
$$IP(|\bar{x} - \mu| \leq 0,7) = 0,95$$

o sea $IP(|\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{\sigma}| \leq \frac{\sqrt{n}0,7}{\sigma}) = 0,95$. Siendo que $IP(|z| \leq 1,96) = 0,95$ si $z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, se deduce que $\sqrt{n} = \frac{1,96\sigma}{0,7}$ o sea $n = \frac{(1,96\sigma)^2}{0,7^2} = 784$.

- (b) La función de distribución empírica se define como:

$$F_n(x) = \frac{\text{card}(x_i \leq x)}{n}$$

Se obtiene el gráfico:



(c) Siendo el tamaño de la muestra $n = 20$, n es un múltiplo de 4. Los valores de los cuartiles empíricos en la muestra son entre los estadísticos de orden 5 y 6, 10 y 11 y 15 y 16, respectivamente. O sea:

- $Q_1 = 1188$
- $Q_2 = 1195$
- $Q_3 = 1201$

Q_2 es la mediana de la distribución: tiene la misma cantidad de observación por debajo y encima de este valor.

Problema 3

(a) El término $\frac{y_0!y_1!y_2}{n!}$ corresponde al número de muestras posibles con y_0 , y_1 y y_2 tipos de hojas respectivamente.

(b)

$$\ln(L) = \ln\left(\frac{n!}{y_0!y_1!y_2}\right) + [y_0\ln(p_0) + y_1\ln(p_1) + y_2\ln(p_2)]$$

Usando el multiplicador de Lagrange α ,

$$\frac{\partial \ln(P)}{\partial p_i} - \alpha(\sum p_i - 1) = \frac{y_i}{p_i} - \alpha$$

Igualando a 0 y observando que $\sum p_i = 1$ se obtiene que $\alpha = \sum y_i = n$. Se concluye que:

$$\hat{p}_0 = \frac{y_0}{n} \quad \hat{p}_1 = \frac{y_1}{n} \quad \hat{p}_2 = \frac{y_2}{n}$$

(c)

$$\begin{aligned} p_0 &= P(Z < 1) = 1 - e^{-\lambda} \\ p_1 &= P(Z < 2) - P(Z < 1) = 1 - e^{-2\lambda} - (1 - e^{-\lambda}) = e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} \\ p_2 &= P(Z > 2) = e^{-2\lambda} \end{aligned}$$

Luego la función de verosimilitud es:

$$\ln L(\lambda) = \ln\left(\frac{n!}{y_0!y_1!y_2}\right) + y_0\ln(1 - e^{-\lambda}) + y_1\ln(e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}) + y_2\ln(e^{-2\lambda})$$

Luego

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \frac{y_0 e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} + y_1 \frac{(-e^{-\lambda} + 2e^{-2\lambda})}{e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}} - 2y_2$$

Igualando a cero, se tiene

$$\hat{\lambda} = \log\left(\frac{y_0 + 2y_1 + 2y_2}{y_1 + 2y_2}\right)$$

Utilizando los cálculos anteriores, se tiene que $\hat{\lambda} = 0,237$.