Guia 1: Repaso de Probabilidades

aux: Diego Diaz, Natalia Rodríguez

1 Variable Aleatoria

Una variable aleatoria es una función que asocia un número entero a cada punto muestral. Las variables aleatorias pueden ser continuas o discretas. Serán discretas cuando los números que se le asocian a cada punto muestral son enteros y serán continuas si los números asociados son reales.

- Discreta Dada una v.a. discreta $X : E \rightarrow \aleph$. Su **Función de Probabilidad** se define de forma que $f(x_i)$ es la probabilidad de que X tome ese valor:

$$f : \aleph \rightarrow [0, 1]$$

$$x_i \rightarrow f(x_i) = P[X = x_i]$$

Además, para un $X = x_1, ..., x_k$:

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i) = 1$$

Para la misma v.a discreta, se define su **Función de Distribución** como la probabilidad de que X tome un valor menor o igual a x_i:

$$f : \aleph \rightarrow [0, 1]\, x_i \rightarrow f(x_i) = P\left[X \leq x_i\right]$$

- Continua Dada una v.a. Continua X: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

Su **Función de Densidad de Probabilidades (f.d.p)** se define como una función $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ integrable y que cumple con las siguientes propiedades:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(x)} dx = 1$$

Además verifica, para $a < b$:

$$P\left[a \leq X \leq b\right] = \int_a^b f(x)dx$$

Tambien para las variables aleatorias continuas se define la función de distribución F, que dado un $\mathbf{x} \in R$, $F(x)$ es la probabilidad de que X sea menor o igual que x:

$$\mathbf{F} : R \rightarrow [0,1]$$
$$x \rightarrow F_{(x)} = P\left[X \leq x\right] = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

2 Esperanza

La esperanza es un promedio ponderado de los valores de una v.a. , con ponderaciones correspondientes a las probabilidades de ocurrencia.

- Para una v.a discreta
$$E(X) = \sum x_i \cdot p(x_i)$$

- Para una v.a Continua:
$$E(X) = \int x \cdot f(x) \cdot dx$$

- Función de una v.a

  Sea M= N(X) , entonces:
$$E(X) = \sum_{i=1} N(x_i) \cdot p(x_i)$$
  si X es una v.a. Discreta y
$$E(X) = \int N(x) \cdot f(x) \cdot dx$$
  si X es una v.a. Continua

Propiedades: Sea X, Y, dos v.a y a,b dos constantes:

- Linealidad
  - E(aX+b) = aE(X)+b
  - E(X+Y) = E(X)+ E(Y)
  - E(a) = a
- E(E(X))= E(X)
- E(X· Y) = E(X)· E(Y) , si X e Y son independientes.

3 Varianza

La varianza es un estimador de la divergencia de una variable aleatoria X de su valor esperado E(X), es decir, una medida de la dispersión de los datos, que tan lejos están unos de otros. Esta se define de la siguiente manera:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Propiedades: Sea X, Y, dos v.a y a,b dos constantes:

- $$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$
- $$Var(a) = 0$$
- Para X,Y independientes. E(XY)=E(X)· E(Y)
- Para x_1,...,x_n v.a Independientes, se cumple:

  $$\sum_{i=1} Var(x_i) = Var \sum_{i=1} x_i$$

- Para x_1,...,x_n v.a NO independientes, se cumple:

  $$Var \sum_{i=1} \alpha_j x_i = \sum_{j=1} \alpha_i^2 Var(x_i) + \sum_i \sum_j cov(x_i, x_j)$$

  Donde la Covarianza se define como:

  $$Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

- Var(X)$\geq$ 0
- Desviacion estadar = $\sqrt{Var(X)}$