MA34B Sección 01 - Problema Extra

17 de Septiembre de 2004

Profesor cátedra: Rodrigo Abt B.
Auxiliar: Ismael Vergara

a) Dos franceses A y B son fanáticos de apostar en un juego de cartas. El jugador A tiene una ganancia semanal X en sus apuestas que sigue una distribución normal $N(\mu_1, \sigma^2)$. La ganancia Y semanal del francés B sigue una distribución normal $N(\mu_2, k\sigma^2)$ con $k > 0$ cte. Se tiene una m.a.s. $X_1, ..., X_n$ de las ganancias semanales para el francés A y una m.a.s. $Y_1, ..., Y_m$ de las ganancias semanales para el francés B. Encuentre el EMV de μ_1, μ_2 y σ^2 suponiendo que las dos muestras son independientes la una de la otra. En particular demuestre que el estimador de σ^2 es igual a

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{nS_X^2 + \frac{mS_Y^2}{k}}{n+m}$$

Deduzca un estimador insesgado para σ^2.

b) Los 2 franceses en general no juegan el mismo número de partidas, lo que incide de manera tal que la ganancia semanal esperada de los dos es $4\mu_1 + \mu_2$. Describa paso a paso cómo construir un intervalo de confianza al 95 % para $4\mu_1 + \mu_2$ utilizando los estimadores de μ_1, μ_2 y σ^2 en función de las medias de las ganancias y el tamaño de las muestras.

Solución:

Tenemos que $X \rightsquigarrow N(\mu_1, \sigma^2)$ y que $Y \rightsquigarrow N(\mu_2, k\sigma^2)$. La función conjunta está dada por

$$f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = f(x_1, ..., x_n) f(y_1, ..., y_m)$$

pues son independientes y por lo tanto

$$L = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}\sum (x_i - \mu_1)^2\right] \left(\frac{1}{\sqrt{2k\pi\sigma^2}}\right)^m exp\left[\frac{-1}{2k\sigma^2}\sum (y_i - \mu_2)^2\right]$$

y se tiene que

$$\frac{dlnL}{d\mu_1} = 0 \Rightarrow \hat{\mu_1} = \overline{X}$$

$$\frac{dlnL}{d\mu_2} = 0 \Rightarrow \hat{\mu_2} = \overline{Y}$$

$$\frac{dlnL}{d\sigma} = 0 \Rightarrow \tilde{\sigma^2} = \frac{1}{m+n}\left(\sum (x_i - \overline{x})^2 + \frac{1}{k}\sum (y_i - \overline{y})^2\right)$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{\sigma^2} = \frac{1}{m+n}\left(nS_X^2 + \frac{mS_Y^2}{k}\right)$$

¿Será insesgado $\tilde{\sigma^2}$? Para responder a ésto tenemos que saber que, si una v.a. cualquiera $T \rightsquigarrow \chi_r^2$ entonces $E(T) = r$. En este caso

$$\frac{nS_X^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi_{n-1}^2 \Rightarrow E\left(\frac{nS_X^2}{\sigma^2}\right) = n-1$$

y

$$\frac{mS_Y^2}{k\sigma^2} \rightsquigarrow \chi_{m-1}^2 \Rightarrow E\left(\frac{mS_Y^2}{k\sigma^2}\right) = m-1$$

Paralelamente, podemos reescribir $\tilde{\sigma^2}$ de la siguiente forma:

$$\tilde{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{m+n}\left(\frac{nS_X^2}{\sigma^2} + \frac{mS_Y^2}{k\sigma^2}\right)$$

por lo tanto hemos construido los estadísticos que siguen la χ^2 dentro de nuestro estimador de σ^2. Si calculamos la esperanza de esta última expresión, nos queda que:

$$E\left(\tilde{\sigma^2}\right) = \frac{\sigma^2}{m+n}\left[E\left(\frac{nS_X^2}{\sigma^2}\right) + E\left(\frac{mS_Y^2}{k\sigma^2}\right)\right]$$

$\Rightarrow$

$$E\left(\tilde{\sigma^2}\right) = \frac{\sigma^2}{m+n}(n-1+m-1) = \left(\frac{n+m-2}{n+m}\right)\sigma^2$$

por lo que no es insesgado. Se deduce entonces que el estimador insesgado es

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{m+n-2}\left(nS_X^2 + \frac{mS_Y^2}{k}\right)$$

b) Tenemos que $X \rightsquigarrow N(\mu_1, \sigma^2)$ y que $Y \rightsquigarrow N(\mu_2, k\sigma^2)$ por lo que es fácil deducir que

$$\overline{X} \rightsquigarrow N(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n})$$

y que

$$\overline{Y} \rightsquigarrow N(\mu_2, \frac{k\sigma^2}{m})$$

por lo tanto,

$$4\overline{X}+\overline{Y} \rightsquigarrow N\left(4\mu_1+\mu_2, 16\frac{\sigma^2}{n}+\frac{k\sigma^2}{m}\right)$$

A partir de ésto, sabemos que

$$\frac{4\overline{X}+\overline{Y}-(4\mu_1+\mu_2)}{\sqrt{16\frac{\sigma^2}{n}+\frac{k\sigma^2}{m}}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

pero no conocemos el valor de σ^2, por lo que se construye una T−Student (que es lo que se debe hacer en caso de varianza desconocida) usando que

$$\frac{nS_X^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_{n-1}$$

y que

$$\frac{mS_Y^2}{k\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_{m-1}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{nS_X^2}{\sigma^2}+\frac{mS_Y^2}{k\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_{m+n-2}$$

Así, el estadístico que sigue la t−Student es

$$\frac{\frac{4\overline{X}+\overline{Y}-(4\mu_1+\mu_2)}{\sqrt{16\frac{\sigma^2}{n}+\frac{k\sigma^2}{m}}}}{\sqrt{\frac{\frac{nS_X^2}{\sigma^2}+\frac{mS_Y^2}{k\sigma^2}}{m+n-2}}} \rightsquigarrow t-Student_{m+n-2}$$

Notemos además que

$$\frac{nS_X^2}{\sigma^2}+\frac{mS_Y^2}{k\sigma^2}=\frac{n+m-2}{\sigma^2}\hat{\sigma^2}$$

por lo que el estadístico anterior se puede reescribir como

$$\frac{4\overline{X}+\overline{Y}-(4\mu_1+\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{16}{n}+\frac{k}{m}\right)\hat{\sigma^2}}} \rightsquigarrow t-Student_{n+m-2}$$

Así, a partir del problema principal

$$P\left(a \leq 4\mu_1+\mu_2 \leq b\right)=1-\alpha$$

construimos el estadístico t-student dentro de las desigualdades para llegar a un problema de la forma

$$P\left(t_1 \leq t_{n+m-2} \leq t_2\right)=1-\alpha$$

donde, haciendo uso de la simetría de la t-student, imponemos que $t_1 = -t_2$, buscamos en las tablas $P(t_2 \geq t_{n+m-2}) = \frac{\alpha}{2}$ para los grados de libertad que correspondan, obteniéndose el valor de t_2 y se llega finalmente a que el intervalo para $4\mu_1 + \mu_2$ es

$$\left[4\overline{X} + \overline{Y} - t_2\sqrt{\left(\frac{16}{n} + \frac{k}{m}\right)\hat{\sigma^2}}; 4\overline{X} + \overline{Y} + t_2\sqrt{\left(\frac{16}{n} + \frac{k}{m}\right)\hat{\sigma^2}}\right]$$

a un nivel de confianza de $1 - \alpha$.