Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema

Tarea 4
Junio 2007

1. Una máquina trabaja un tiempo (antes de fallar) que puede ser modelado como una v.a. $e(\lambda)$. Cuando falla, la reparación toma un tiempo aleatorio, que se distribuye $e(\mu)$. Si la máquina está buena en t=0, calcule la probabilidad que lo esté en el instante t. Indicación: Considere el proceso:

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{máquina buena en t} \\ 1 & \text{máquina mala en t} \end{cases}$$

   Plantee y resuelva las ecuaciones diferenciales.

2. Usted llega al paradero de Blanco para esperar su micro (XXX). Por su experiencia sabe que ésta pasa según un proceso de Poisson de tasa λ cada 10 minutos.

   a) Calcule la probabilidad de que en un intervalo de 15 minutos pasen al menos 2 micros.

   b) Se le acaba de pasar una micro. Calcule la probabilidad de que tenga que esperar a lo más 10 minutos para la próxima.

   c) Usted se quedó dormido por 20 minutos. Cuando despierta le dicen que pasaron 2 micros. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas hayan pasado en los últimos 10 minutos de su siesta?

   d) Haciendo grandes esfuerzos usted recuerda que la micro (XXY) también le sirve, y ésta pasa a tasa de 2 cada 15 minutos. Calcule la probabilidad de que se pueda ir a su casa en los prximos 5 minutos.

   e) Piense ahora que se subió a la micro. Su trayecto es largo y tiene un tiempo para filosofar. Usted observa que el número de pasajeros que se sube es un proceso de Poisson de parámetro λ (personas/minuto). También observa que el chofer no le da boleto a todos los pasajeros sino que sólo le da al 80 % elegidos al azar. Si $Y_t = N^o$ de boletos entregados en $(0, t)$, $P_k(t) = P(Y_t = k)$ donde Y_t se llama proceso de Poisson filtrado. Plantee las ecuaciones diferenciales para $P_k(t)$ y muestre que:

$$P_k = \frac{e^{-\lambda at}(\lambda at)^k}{k!}$$

Es solución con a=0.8.

3. A una gasolinera que cuenta con sólo una bomba de bencina, llegan vehículos según un proceso de Poisson de tasa 15 autos por hora.

   a) Si entre las 12:00 y 13:00 pm. llegaron 15 vehículos, calcule la probabilidad de que entre las 12:50 y 13:00 hayan llegado al menos dos vehículos.

   b) Suponga ahora que el tiempo que se necesita para atender un vehículo es exponencial de media 5 minutos. Si la bomba se está usando, los clientes pueden desistir (no ingresan y se van); en particular si hay n autos en la gasolinera, la probabilidad de que un cliente potencial que llega desista es q_n.

      1) Plantee el diagrama de estados y ecuaciones de balance para el proceso "Número de vehculos en la gasolinera".

      2) Suponiendo

      $$q_n = \begin{cases} \frac{n}{3} & \text{n=0,1,2,3} \\ 1 & n > 3 \end{cases}$$

      Resuelva las ecuaciones de balance. Calcule el tiempo promedio que un vehículo permanece en la gasolinera y la proporción de vehículos que llegan pero no ingresan.

4. La sala de emergencia de un consultorio atiende con dos equipos médicos y no admite cola (los pacientes que no logran ingresar a esta sala deben ir a otro consultorio). A la sala llegan dos tipos de pacientes: los paciente tipo A, a una tasa de 4 por hora y los tipo B, a una tasa de 2 por hora. Cada paciente tipo A que llega recibe atencin de algn equipo mdico desocupado, demorándose un tiempo exponencial de media 15 minutos. Cada paciente tipo B que entra requiere la atención simultánea de los dos equipos, demorándose un tiempo exponencial de media 40 minutos.

   a) Plantee el proceso a estudiar , indicando los estados, el diagrama y las ecuaciones de balance.

   b) Suponiendo que tiene resueltas las ecuaciones de balance, indique cómo calcularía la proporción de pacientes que no ingresa a la sala, y el tiempo promedio que cada equipo médico está ocioso (considere un turno de 24 horas). ¿ Cómo cambia su modelo (diagrama de estados) si uno de los equipos médicos es más lento demorándose en promedio 30 minutos (cuando atiende solo), manteniéndose el resto de las condiciones?

5. A una oficina del Registro Civil e Identificación llega gente a sacar su cédula de identidad según un proceso de Poisson de tasa 12 por hora.

   a) Existen dos funcionarios que atienden cada uno según una exponencial de media 8 minutos. Por simplicidad de cálculo suponga que una persona ingresa al sistema sólo si en él hay menos de 4 personas. Calcule en régimen permanente:

      1) La proporción de personas que no ingresa.
      2) El tiempo promedio que demora una persona en el sistema.

   b) Las autoridades desean cambiar el procedimiento de atención separándolo en dos etapas. La etapa A (pago y llenado de antecedentes) con un funcionario atendiendo según una exponencial de media 4 minutos y la etapa B (foto, firma, huellas) atendida por un funcionario según una exponencial de media 4 minutos. Cada cliente debe pasar secuencialmente por ambas etapas (A-B) y en las dos puede existir cola sin restriccin de capacidad.M odele este sistema planteando el proceso de estudio y el diagrama de estados.

6. Los alumnos llegan a un negocio de fotocopias según un proceso de Poisson de tasa 2 por minuto.

   a) 1) Si en un intervalo de 5 minutos llegaron 8 alumnos, calcule la probabilidad de que sólo uno de ellos haya llegado en el último minuto.

      2) Calcule la probabilidad de que el tiempo entre dos alumnos supere los tres minutos.

   b) El negocio funciona con tres fotocopiadoras y la atención de un alumno es exponencial de media 2 minutos. Cuando un alumno llega y observa a cuatro compañeros se va a otro negocio.

      1) Si X_t : N^o de alumnos en el negocio; plantee el diagrama de estados y ecuaciones de balance.

      2) Si $P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$, $P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0$, $P_3 = \frac{\lambda^3}{6\mu^3} P_0$, $P_4 = \frac{\lambda^4}{24\mu^4} P_0$, es solución de las ecuaciones, , calcule numéricamente el tiempo promedio que demora un alumno en el negocio y la proporción de tiempo ocioso que tienen las máquinas.

c) De las tres fotocopiadoras, dos son "corrientes" y una "especial". Cada fotocopiadora corriente funciona un tiempo exponencial de media 1 hora y su reparación demora una media de 15 minutos atendida por una persona. La fotocopiadora especial funciona un tiempo exponencial de media 1,5 horas y su reparacin demora 20 minutos atendida por dos personas. Existen dos personas para reparar las máquinas. Modele el sistema de reparación de fotocopiadoras planteando el proceso en estudio y diagrama de estados.

7. A un exámen oral llegan alumnos según un proceso de Poisson de tasa $\lambda = 5[\frac{alumnos}{hora}]$.

   a) Si entre las 00:00 hrs. y las t:00 hrs. han llegado n alumnos; calcule la probabilidad que entre las 0:00 hrs. y s:00 hrs. hayan llegado k alumnos ($\forall s, t$, $\forall k, n$).

   b) Antes de rendir el exámen los alumnos han sido clasificados en dos categorías: los buenos alumnos y los regulares. Los buenos alumnos serán examinados por el Profesor Auxiliar, mientras que los alumnos regulares serán evaluados por una comisión de Profesores. En caso de que el Profesor Auxiliar, tras examinar a un alumno se declare "incompetente", el alumno deberá esperar para ser evaluado por la comisión de Profesores. Se sabe que el Profesor Auxiliar examina según un tiempo exponencial de media $\frac{1}{\mu_a} = 5$[minutos], mientras que la comisión examina según un tiempo exponencial de media $\frac{1}{\mu_c} = 15$ [minutos]. Además se sabe que un alumno es bueno con probabilidad p y que el Profesor Auxiliar se declarará incompetente con probabilidad q. Suponiendo que los alumnos al llegar se ponen en dos filas, una para cada instancia de examinación(sin restricciones de capacidad):

      1) Modele el sistema y dibuje el diagrama de estados.

      2) Suponiendo conocidas la Probabilidades estacionarias, calcule el tiempo promedio de espera de un alumno regular (desde que llega hasta que es examinado).

8. *a*) A un banco llegan clientes, los cuales se ponen en la fila de la única caja. Además se sabe que la probabilidad que el tiempo transcurrido entre la llegada de dos clientes sea mayor a 8 minutos es e^{-16}. La atención demora una media de 0,2 minutos.

      1) Modele el sistema y muestre que la solución de las ecuaciones de balance es:

      $$P_i = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \quad \forall i$$

      2) Qué condición debe cumplirse para la existencia de probabilidades en régimen permanente? Se cumplen en este caso? Determine P_0.

3) Otorgue las expresiones que permiten calcular el tiempo promedio de una persona en el sistema y el largo promedio de la cola.

b) Suponga ahora que el banco funciona como autoservicio (vía internet) con tasa de llegada λ y tasa de autoatención μ. Modele el sistema.

9. Un famoso grupo de música va a realizar un concierto en Santiago. Se sabe que los fanáticos del grupo llegan al concierto en un tiempo distribuido exponencialmente de media 2 minutos. Al llegar, los fanáticos se ponen en una fila única donde deben esperar que un guardia les corte las entradas, el cual demora un tiempo exponencial de media 1 minuto. Además, cuando hay i personas en la cola (incluyendo al que está siendo atendido por el guardia) y llega un nuevo fanático, existe una probabilidad r_i de que los fanáticos rompan la reja, en cuyo caso todos los fanáticos de la cola entrarán corriendo al concierto (con $r_0 = 0$) . Suponga que luego de caerse la reja, ésta es arreglada automáticamente y puede seguir el ingreso de fanáticos en forma regular. Modele el sistema.

10. Un estudiante es contratado para trabajar en un Call Center de una prestigiosa empresa de servcios de telefonia y televisión por cable. Su labor consiste en recibir las órdenes telefónicas de los clientes que desean solicitar un determinado pack de servicios de la compañia, para luego transferirlas al departamento de ventas. Las órdenes llegan a suu terminal según un proceso de Poisson de tasa λ órdenes/hora, siempre en forma unitaria. A medida que se juntan órdenes el estudiante debe transferirlas agrupadas al departamento de ventas, tardando un tiempo exponencial de media $\frac{1}{\beta}$ horas por cada lote, independiente del número de órdenes que haya reunido. No obstante que puede acumular como máximo N órdenes en su terminal, estado a partir del cual no ingresan más llamados hasta que su terminal se encuentre vacía nuevamente.

    a) Modele el sistema propuesto como una cadena de Markov a tiempo continuo indicando los estados y transiciones.

    b) Plantee las ecuaciones que permiten encontrar las probabilidades estacionarias y calcule la fracción del tiempo en que la terminal del estudainte se encuentra sin llamadas.

    c) Encuentre una expresión para calcular el número esperado de órdenes en la terminal, en función de los parámetros del problema.