Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema

Profesor Auxiliar : José Luis Malverde

CLASE AUXILIAR EXTRA

25 DE MAYO 2007

1. a) Primero es necesario encontrar la probabilidad de que un día sea caluroso, la cuál denotaremos por p , luego usando una distribución binomial de parámetros n y p , se calcula la probabilidad de no obtener ningún día caluroso (es más sencillo) y se despeja n por: $n = \frac{\log(0,05)}{\log(1-p)}$, donde p se puede obtener haciendo uso de la tabla ($p = 0,0485$).

- b) Sabemos que el promedio satisface: $\bar{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, luego $\bar{X}\mu \rightarrow N(0, \sigma^2)$, igualando: $\mathbb{P}(|X\mu| < 1) = 0,99$ y usando las propiedades de la distribución Normal se obtiene:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} > \frac{\sqrt{n}}{3}\right)$$

El valor correspondiente en la tabla $\sqrt{n} = 2,57 \cdot 3 \Rightarrow n = 59,4 \Rightarrow n = 60$

- c) Se debe usar distribución geométrica, expresando el valor esperado por:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-p)^k p = \frac{1-p}{p}$$

- d) Al aplicar una transformación lineal la distribución obtenida es claramente normal, por lo que solo resta encontrar los parámetros, luego se tiene que $F \rightarrow N(77, 24, 5)$, donde los parámetros son calculados a partir de los parámetros de la transformación lineal.
2. Por propiedades de la Normal, se tiene que $\bar{X} \rightarrow N(46, \frac{9}{2})$ y $\bar{Y} \rightarrow N(54, \frac{4}{3})$, luego $(\bar{X} - \bar{Y}) \rightarrow N(-8, \frac{35}{6})$.

Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\bar{X} - \bar{Y}| < 2) &= \mathbb{P}(-2 < (\bar{X} - \bar{Y}) < 2) = \mathbb{P}((\bar{X} - \bar{Y}) < 2) - \mathbb{P}((\bar{X} - \bar{Y}) < -2) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) + 8}{\sqrt{\frac{35}{6}}} < \frac{10}{\sqrt{\frac{35}{6}}}\right) - \mathbb{P}\left(\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) + 8}{\sqrt{\frac{35}{6}}} < \frac{6}{\sqrt{\frac{35}{6}}}\right) = 1 - 0,0085 = 0,9915 \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < C) &= \mathbb{P}\left(\frac{X - 46}{3} > \frac{C - 46}{3}\right) \\ \mathbb{P}(Y > C) &= \mathbb{P}\left(\frac{Y - 54}{2} > \frac{C - 54}{2}\right) \end{aligned}$$

Por simetría de la normal se tiene que:

$$\frac{C - 46}{3} = -\frac{C - 54}{2} \Rightarrow C = 50,8$$

3. Por T.C.L. basta encontrar $\mathbb{E}(X_i)$ y $V(X_i)$, donde X_i es el número obtenido en la i -ésima extracción. Un sencillo cálculo nos da por resultado $\mathbb{E}(X_i) = 7$, $V(X_i) = 14$, luego:

$$\mathbb{P}(X > 200) = \mathbb{P}(z > \frac{200 - 140}{\sqrt{20 \cdot 14}}) = \mathbb{P}(z > 3,58) = 0$$

Como el número buscado no se encuentra en la tabla se asume que tal probabilidad es cero.

4. Por el teorema de cambio de variable, se tiene que $Y = X^2$ tiene la densidad:

$$f_y(y) = \alpha \beta y^{\frac{\beta-1}{2}} e^{-\alpha y} \frac{1}{2\sqrt{y}} = 2e^{-2y}$$

Lo cual corresponde a una distribución exponencial, de donde se deduce que: $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$ y $VAR(Y) = \frac{1}{4}$. Por el TCL se tiene que

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{20} X_i^2 - 10}{\sqrt{5}} > \frac{12 - 10}{\sqrt{5}}\right) = 0,1857$$