Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema

Tarea 3

Mayo 2007

1. Considere una sucesión de variables aleatorias $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ tales que $\mathbb{E}(Y_i) = \rho^i$ y $Var\,(Y_i) = \sigma_i^2$. Sea X la v.a. discreta tal que:

   $\mathcal{P}(X = k) = \frac{1}{2}^k \; k = 1, 2, ...$

   Para la v.a. $Z = \sum_{i=1}^{X} Y_i$ determine $\mathbb{E}(Z)$

2. Sea (X, Y) un vector aleatorio. Se define el coeficiente de correlación entre X Y, denotado por ρ_{XY} , como:

   $$\rho_{XY} = \frac{\mathbb{E}\{(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))\}}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$$

   a) Muestre que si X ,Y son independientes entonces $\rho_{XY} = 0$.

   b) Muestre, por medio de un ejemplo, que si $\rho_{XY} = 0$ no implica que X, Y son independientes.

   c) Muestre que $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.

   d) Muestre que $Y = a + bX$ si y sólo si $\rho_{XY} = 1$.

3. Sean $X_1 \to N(\mu, \sigma^2)$,$X_2 \to N(\mu, \sigma^2)$, independientes.
   Considere $Z(t) = X_1 \cdot cos(wt) + X_2 \cdot sen(wt)$, $V(t) = \frac{\delta Z(t)}{\delta t}$.

   a) Determine la distribución de $Z(t)$ y $V(t)$ (t fijo).

   b) Muestre que $\rho_{ZV} = 0$.

4. Considere una v.a. X con distribución *Beta* de parámetros $\alpha, \beta > 0$, es decir, para $0 < x < 1$:

   $f_X\,(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}$

   a) Calcule $\mathbb{E}(X)$ y $Var\,(X)$.

b) Sean $Y_1 \to G(\alpha_1, \beta)$ y $Y_2 \to G(\alpha_2, \beta)$ v.a. independientes. Muestre que $U = \frac{Y_1}{Y_1 + Y2} \to Be(\alpha_1, \alpha_2)$ y que U es independiente de de $V = Y_1 + Y_2$.

c) Suponga que la prporción de X articulos defectuosos, en un gran lote, es desconocida y que $X \to Be(\alpha, \beta)$. Si se selecciona al azar un artículo del lote. Cuál es a probabilidad que sea defectuoso?

5. Sea X una v.a discreta con $R_X \subset \mathbb{N}$. Se define la función generadora de probabilidades como:

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

a) Determine $G_X^{(n)}(z)|_{Z=0}$.

b) Calcule $G_X(z)$ si $X \to P(\lambda)$.

6. Sean $X_i \to U(0,1)$, $i = 1, ..., n$, independientes. Determine usando la función generadora de momentos la distribución de la v.a.: $Y = -2 \cdot ln(\prod_{i=1}^{n} X_i)$. ¿ Cuál es la distribución para n grande? Calcule $\mathbb{P}(y > 55)$ si $n = 40$.

7. Sea X una v.a. tal que $\mathbb{E}(x^k) = (k+1)!2^k$, $k = 1, 2....$ Determine, usando la F.G.M. la distribución de X.

8. Un embarque de televisores consta de 50 lotes de 1000 TV cada uno. De cada lote, se examina una muestra de 80 televisores (en forma independiente), contándose el número de defectuosos. Si el fabricante asegura que la probabilidad que un televisor sea defectuoso es 0,01; calcule la probabilidad que se encuentran más de 30 televisores defectuosos en los 50 lotes.

9. a) Sea X v.a. discreta con recorrido en $\mathbb{N}$. Mustre que:

$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}(X > k)$

b) Durante las fiestas usted jugó lanzando argollas a una botella de pisco de tal forma que la probabilidad de apuntarle es r, y lanzó hasta que obtuvo su botella. Usando el resultado de a, calcule el número esperado de lanzamientos realizados.

10. Suponga que X es una v.a. con la siguiente f.d.p.:

$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}$ para $x > a$, y $f(x) = 0$ para $x < a$.

a) Encontrar la f.g.m. de X y, usando ésta, encontrar $\mathbb{E}(X)$.

b) Supoga que la duración de una ampolleta es una v.a. con f.d.p. igual a la anterior. Cuando una ampolleta falla es reemplazada por otra con la misma f.d.p. Encuentre el número necesario de ampolletas para asegurar el funcionamiento del sistema por más de 400 horas con probabilidad 0,95. Considere $\lambda = 0{,}5$ y $a = 6$.

11. a) Dos grandes poblaciones de hombres y mujeres tienen estatira (H, M) v.a. tal que $H\left(1{,}7; 0{,}1^2\right)$ y $M\left(1{,}6; 0{,}05^2\right)$. Si se escoge un individuo al azar y resulta con estatura superior a 1,68; calcula la probabilidad de que sea hombre. Cómo cambia su respuesta si resulta con estatura igual a 1,68?

    b) El ingreso mensual de las personas X se puede considerar como una v.a. producto de muchas variables independientes $(sexo, edad, educacion, etc.)$ es decir $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ con $\mathbb{E}(X) = \mu_i$ y $Var\left(X_i\right) = \sigma_i^2$. Determine para n grande la densidad de X.

12. La edad de una gran población es una v.a. normal de media 46 años y desviación estándar de 8 años.

    a) Si de la población se extraen n individuos obteniéndose por lo menos uno meno a 50 años, calcule la probabilidad de que sus edades difieran en menos de un año.

    b) Si se toman dos adultos. Encuentre la pobabilidad de que sus edades difieran en menos de 1 año.

13. Sean X e Y los errores de medición de la coordenadas x e y al medir la posición de un objeto en el plano. Si $X \rightarrow N\left(0, \sigma^2\right)$ y $Y \rightarrow N\left(0, \sigma^2\right)$ determinar la densidad de: $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ usando T.C.V.

14. La durción de dos aparatos eléctricos son una v.a. (d_1, d_2) con distribución $N\,(43, 36)$ y $N\,(45, 9)$ respectivamente.

    a) Si usted debe elegir uno de dichos aparatos, cuál escogería?

    b) Si se instalan dos equipos, uno de cada tipod, de tal forma que uno de ellos funciona cuando el otro falla. Cuál es la probabilidad de que el sistema total dure más de 80 horas.

    c) Si se eligen sólo equipos de tipo d_1 y se instalan de form que el i-ésimo comienza a funcionar cuando el $(i-1)$-ésimo falla. Determine cuantos equipos se deben instalar para que el sistema funcione más de 750 hors con probabilidad 0.999. Asuma independencia en las fallas.

15. Se considera que el tiempo de reacción frente a un estímulo luminoso es una v.a. Tnormal con media 0,65 segundos. De acuerdo con los resultados de una investigación se estima que bajo los efectos del alcohol el tiempo de reacción puede expresarse como $T^* = 1{,}4T - 0{,}2$. Además se indica que la probabilidad que un individuo que ha ingerido alcohol reaccione antes de un segundo es 0,9.

    a) Cuál es la probabilidad de que ub sujeto que no ha ingerido alcohol reccione antes de 0,7 segundos.

    b) Si se escogne 10 sujetos en forma independiente que no han ingerido alcohol. Cuál es la probabilidad de que a lo más dos reaccionen después de 0,7 segundos?