

Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema
Profesores Auxiliares : José Luis Malverde
Jorge Catepillán

CONTROL 2 23 DE ABRIL 2007

1. a) Se lanza un dado perfecto y se denota por “ i ” el resultado obtenido. Luego se tiran tres monedas en forma independiente y tal que $\mathbb{P}(\text{cara}) = \frac{i}{6}$. Calcule la probabilidad que i sea impar, sabiendo que al menos salió un sello en las tres monedas.
 - b) Sean A y B dos eventos tales que $0 < \mathbb{P}(A)$, $0 < \mathbb{P}(B)$. Se dice que B repele a A si $\mathbb{P}(A|B) < \mathbb{P}(A)$ y que B atrae a A si $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A)$. Pruebe que si B atrae a A , entonces A atrae a B y B^c repele a A .
 - c) Sean A, B, C eventos tales que $0 < \mathbb{P}(B \cap C) < \mathbb{P}(B)$, pruebe que $0 < \mathbb{P}(B \cap C^c) < \mathbb{P}(B)$ y $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(C|B)\mathbb{P}(A|B \cap C) + \mathbb{P}(C^c|B)\mathbb{P}(A|B \cap C^c)$.
2. a) Sea X_1, X_2, \dots, X_n v.a. independientes con densidades $f_{X_i}(x)$ y distribuciones acumuladas $F_{X_i}(x)$. Si $M = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ determine su distribución acumulada y derive su densidad.
 - b) Repita lo anterior para la v.a. $m = \min\{X_1, \dots, X_n\}$.
 - c) Suponga Y v.a. tal que:

$$\mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{(e-1)j!} \quad j = 1, 2, \dots$$

y $X_i \rightarrow U(0, 1) \quad \forall i$.

Muestre que $M = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ tiene densidad dada por:

$$f_M(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{e-1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

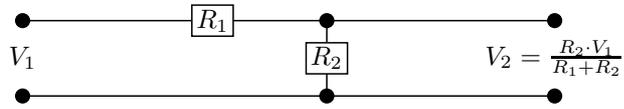
- d) Considere el cambio de variable $Y = H(X)$, con H monótona y diferenciable y tal que:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{e-1} & 1 \leq x \leq e \\ 0 & \sim \end{cases}$$

determine H .

3. El circuito de la figura es un divisor de voltaje. El voltaje V_1 es constante y vale 1(V). Las resistencias R_1 y R_2 son v.a. independientes uniformes en los intervalos $(1, 2)$ y $(0, 1)$

respectivamente.



- Calcule la probabilidad que el voltaje resultante V_2 sea menor a $0,2(\text{V})$ para valores de R_2 mayores a $0,1(\text{Ohm})$.
- Determine, usando T.C.V. la función densidad de V_2 .
- Un instrumento registra correctamente voltajes entre $0,2$ y $0,4$ (V), en tanto a los mayores a $0,4$ les asigna $0,4$ y a los menores a $0,2$ los ignora (no es capaz de medirlas). Estudie probabilísticamente la v.a. T : voltaje registrado por el instrumento. Suponga que conoce $f_{V_2}(v)$ aunque no haya resuelto b.