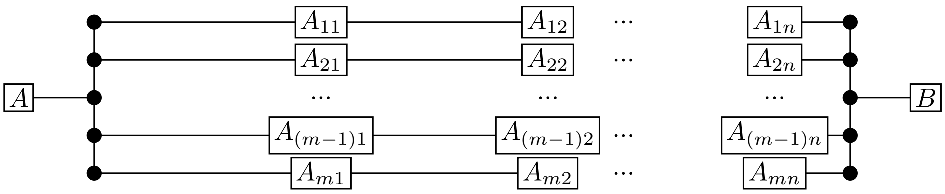
Probabilidades y Procesos Estocásticos

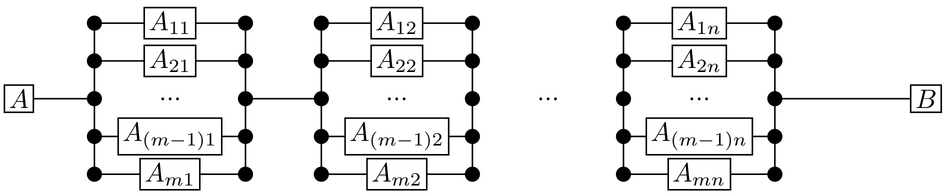
Profesor Cátedra	:	Fernando Lema
Profesores Auxiliares	:	José Luis Malverde
		Jorge Catepillán

Tarea 2

Entrega: Inicio Control 2

1. Considere los circuitos:





Las componentes A_{ij} tienen una probabilidad p de funcionar ($(1-p)$ de fallar) y lo hacen en forma independiente. Calcule para ambos circuitos la probabilidad que exista flujo desde el punto A hasta el punto B.

2. En un concurso de TV existen 3 puertas con un premio millonario detrás de una de ellas. El animador (que sabe cual es la puerta millonaria) le pide al concursante que escoja alguna. Posteriormente el animador abre una puerta no premiada de entre las dos que quedan y se la muestra al concursante. Le ofrece además cambiar su elección de puerta. Indique con argumentos probabilísticos que le conviene al concursante.

3. *a*) En una elección N votantes votan por los candidatos A o B, lanzando una moneda perfecta y en forma independiente. Si se sabe que A obtuvo n votos y B obtuvo m votos, calcule la probabilidad que el último voto haya sido para A. ¿Cómo cambia la respuesta si la moneda no es perfecta?

b) Se sabe que A recibe n votos y B recibe m votos, con $n > m$. El objetivo de esta parte es probar que la probabilidad de que A siempre esté por delante de B en el conteo de votos, que denominaremos $p_{n,m}$, vale $\frac{n-m}{n+m}$ (1) Sea $E_{n,m}$ el evento "A siempre va adelante de B en el conteo de votos cuando A recibió n votos y B recibió m votos", luego $p_{n,m} = P(E_{n,m})$. Condicione con respecto al quien recibío el último voto y llegue a una relación de recurrencia. Por último muestre que (1) es solución de la recurrencia encontrada.(Asuma que todos los ordenamientos de los votos son igualmente probables)

4. Para predecir el tiempo un día es clasificado como seco o lluvioso. Por experiencia se sabe que la probabilidad que un día sea igual al anterior se asume constante e igual a p.

   a) Si el 1^o de abril es seco con probabilidad β muestre que la probabilidad que el n-ésimo día del año (contado a partir del 1^o de abril) sea seco (P_n) queda dada por:

$$P_n = [(\beta - \frac{1}{2})(2p-1)^{n-1}] + \frac{1}{2}$$

   b) Si el 16 de abril está seco calcule la probabilidad que el 14 de abril también lo haya estado. Para esto considere $\beta = 1$, $p = \frac{9}{10}$.

5. Considere un conjunto de N objetos $\Omega = \{1, ..., N\}$ y $M = \mathcal{P}(\Omega) = \{C : C \subseteq \Omega\}$. Si se extrae un elemento "al azar" de M (i.e. subconjunto de Ω), con reposición y luego se extrae otro, calcule la probabilidad que el segundo conjunto esté contenido en el primero. Hint: Condicione respecto a la cardinalidad de la 1^a extracción.

6. Cuando en una encuesta se desea preguntar por algún tema delicado como el aborto (o infidelidad, violencia, divorcio, etc.), y que las personas no están dispuestas a contestar abiertamente, se puede usar el siguiente procedimiento encubierto para estimar la probabilidad p que una persona esté a favor :

   Al encuestado se le presentan dos preguntas:

   A ¿ Está de acuerdo con el aborto?

   B ¿ Está en desacuerdo con el aborto?

   y se le pide que lance (en secreto) un dado perfecto, de modo que si sale mayor a cuatro contesta A y en caso contrario contesta B. Por último lo único que el encuestado responde es SI o NO.

   a) Describa un espacio muestral para este procedimiento.

   b) Si una persona respondió SI, ¿Cuál es la probabilidad que esté a favor del aborto?

c) Si a usted, como encargado de la encuesta, le entregan como resultado la proporción (probabilidad) de personas que respondió SI (P_s), calcule la proporción (probabilidad) de personas que está a favor del aborto.

Obs: Suponga que la encuesta es aplicado a un gran número de personas y que estas son honestas al responder.

7. Suponga que en un juego usted gana un partido con probabilidad p. Cuando gana su capital se dobla y cuando pierde su capital se reduce a la mitad. Si comienza con C [UM] de capital y juega n partidos independientes, determine la distribución de probabilidad de la variable aleatoria Utilidad.

8. Si la v.a. $K \rightarrow U(0,5)$, calcule la probabilidad que las raíces de la ecuación $4x^2+4Kx+K+2=0$ sean reales.

$$K \rightarrow U(a,b) \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

9. En un ataque aéreo la misión es destruir una pista de aterrizaje. El sector donde cae la bomba queda inutilizado en su ancho si esta cae a lo sumo a 10 metros del eje central de la pista. La distancia del impacto al eje central de la pista es una v.a. con función densidad definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{30+x}{900} & \text{si } -30 \leq x \leq 0 \\ \frac{30-x}{900} & \text{si } 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

a) Si para inutilizar la pista se necesitan por lo menos k impactos ¿Cuál es la probabilidad de lograr el objetivo si en el ataque se lanzan n bombas?

b) Si k=1, determine cuantas bombas se deben lanzar para inutilizar la pista con probabilidad 0,99.

10. Al revisar un lote de 10 motores e'ste es totalmente rechazado o es vendido, dependiendo del siguiente procedimiento: dos motores elegidos al azar se inspeccionan; si al menos uno es defectuoso el lote es rechazado, en otro caso es aceptado. Suponga que cada motor cuesta 75 [UM] y se vende a 100[UM]. Si el lote contiene 2 motores defectuosos, calcule la utilidad esperada del constructor.

11. Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución de Pareto de parámetros X_0, α ($X_0 > 0, \alpha > 0$) si su función densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \cdot X_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geq X_0 \\ 0 & \text{si } x < X_0 \end{cases}$$

   a) Si $Y = Ln(\frac{X}{X_0})$, determine la densidad de Y

   b) Considere que X representa el ingreso (en miles de \$) mensual de un grupo de individuos con $X_0 = 200$ y $\alpha = 2$. Suponga que de un gran número de individuos se escogen 5 al azar en forma independiente. Calcule la probabilidad que al menos 4 de ellos tengan ingresos superiores a \$300.000.

   c) Si a todas las personas que ganan menos de \$400.000 se les da un reajuste de un 10 % mientras que a aquellos que ganan más de \$400.000 se les da \$40.000 de reajuste, determine la distribución de probabilidad de la variable aleatoria monto de reajuste y calcule su esperanza.

12. Suponga que la duración de un equipo sigue una distribución $e(\lambda)$, es decir:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

   Para efectuar el control de calidad se cuenta con un operario cuya misión es medir la duración de los equipos. Los equipos se ponen a funcionar en $t = 0$, pero el operario (por flojera) sólo se pone a inspeccionar en $t = t_1$, de tal forma que a todo equipo fallado anteriormente le asigna t_1 horas. También por flojera el operario se va temprano (antes que termine el proceso) y a todo equipo que en t_2 (hora en que se va) esté bueno le asigna t_2 horas.

   a) Determine la distribución de Y: duración informada por el operario.

   b) Considere ahora que el operario se pone honesto y decide eliminar de su proceso a todo equipo que no haya inspeccionado realmente. Determine la distribución de Z: duración informada por el operario.

c) Si Y se distribuye con una exponencial de parámetro α independiente de X, calcule $\mathbb{P}(Y > k \cdot X)\forall k$

d) Determine la densidad de $Z = X + Y$.

13. Un plano está dividido en rectas paralelas separadas una distancia L_1 una de la otra. Se dispone de una aguja (barra) de largo L_2 que es lanzada al azar sobre el plano. Calcule la probabilidad que la aguja corte alguna de las rectas. Evalúe en $L_1 = L$ y $L_2 = \frac{L}{2}$

14. Suponga que un comerciante de autos usados paga una cantidad X (en miles de pesos) por un vehículo y lo vende por una cantidad Y (en miles de pesos). Las variables X e Y tienen una densidad conjunta :

$$f_X Y(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{36} & \text{si } 0 < x < y < 6 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

a) Determine la función densidad de la variable ganancia por vehículo (G).

b) Considere ahora sólo la variable Y (precio de venta) con densidad:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y^2}{72} & \text{si } 0 < y < 6 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Debido alas condiciones económicas imperantes, el comerciante decide hacer un regalo a sus compradores. Él ofrece por todo vehículo cuyo precio de venta está entre 0 y 2000 un 1 % en vales de bencina. Si el precio está entre 2000 y 4000 regala un par de parlantes cuyo valor es \$40. Para el resto entrega una radio de valor \$100. Estudie probabilísticamente la variable monto regalado por automóvil.

15. La fuerza magnética H en un punto P ubicado a X unidades de un cable con corriente I, queda dada por:

$$H = \frac{2I}{X}$$

a) Si P es un punto variable con X e I, suponiendo que X se distribuye uniforme en el intervalo $(2, 4)$ e I uniforme en el intervalo $(10, 20)$ (ambas variables independientes) calcule la función densidad de H.

b) Calcule la $\mathbb{P}(H > 10|X < 3)$.

16. De un mazo de naipes se sacan dos cartas sin reposición, definiendo el vector (X, Y) Como X: N^o de monos obtenidos. Y: N^o de ases obtenidos.

a) Determine la distribución de probabilidades (X, Y).

b) Determine las distribuciones marginales de X e Y.

c) Determine la distribución condicional de X dado $Y = y$ $\forall y \epsilon R_y$ y la distribución condicional de Y dado $X = x$ $\forall x \epsilon R_x$.

d) Determine la distribución de probabilidades de las variables $M = H(X, Y) = Max(X, Y)$ $M = H(X, Y) = Min(X, Y)$.