GUIA #1 DE EJERCICIOS DE PROBABILIDAD

MA-34A Prof. R. Gouet, 20/03/07

1. Siete personas que no se conocen esperan el ascensor en el primer piso de un edificio de 5 pisos. Calcule la probabilidad de que el ascensor deba detenerse en todos los pisos (del 2 al 5). Explique los supuestos de su cálculo.

2. Un comité 12 personas se selecciona al azar de un grupo de 10 hombres y 10 mujeres. Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos relativos a la composición del comité:
   (i) Hay 6 hombres y 6 mujeres.
   (ii) Hay un número par de mujeres.
   (iii) Hay más mujeres que hombres.
   (v) Hay a lo menos 8 hombres.

3. Un jugador extrae 6 cartas al azar de un mazo de 52. Calcule la probabilidad de obtener:
   (i) 5 cartas de la misma pinta.
   (ii) 4 ases.
   (iii) 4 del mismo valor.
   (iv) 3 ases y dos reyes.

4. Un estudiante escoge al azar 7 de 10 preguntas en un examen. Calcule la probabilidad de que
   (i) Responda a las 2 primeras.
   (ii) Responda al menos 3 de las primeras 5 preguntas.

5. Determine de cuántas maneras pueden sentarse 6 personas A B C D E F en torno a una mesa redonda, de tal manera que dos arreglos son considerados equivalentes cuando uno se obtiene del otro mediante rotación.

6. Suponga que las 3 hombres y 3 mujeres se sientan al azar en torno a una mesa redonda (con 6 puestos). Calcule la probabilidad de que hombres y mujeres queden ubicados en lugares alternados.

7. Suponga que se escribe una palabra al azar usando todas las letras siguientes: $a, b, c, d, e, e, e, e, e$. Calcule la probabilidad de que la palabra obtenida no tenga letras e adyacentes.

8. Una partícula (o un bicho) se mueve en el plano $\mathbb{Z}^2$ dando pasos unitarios ya sea hacia arriba o hacia la derecha.

(i) Cuántos caminos o recorridos posibles tiene la partícula para ir de $(0,0)$ a $(7,7)$.
(ii) Cuántos recorridos hay desde $(2,7)$ a $(9,14)$.
(iii) Cuántos recorridos hay desde $(0,0)$ a $(m,n), m,n > 0$.
(iv) Cuántos recorridos hay desde $(0,0)$ a $(m,n), m,n > 0$, que pasen por el punto (p,q), con $p \leq m$ y $q \leq n$.

9. El juego del Loto consiste en extraer al azar un conjunto de 6 números tomados del conjunto $\{1,2,3,\ldots,36\}$. Calcule la probabilidad de que la cartilla ganadora contenga sólo números impares.

10. Una urna contiene 3 bolitas rojas, 4 blancas y 5 azules. Otra urna contiene 5 rojas, 6 blancas y 7 azules. Se extrae una bolita al azar de cada urna. Suponiendo independencia de las extracciones, calcule la probabilidad de que
    (i) Ambas sean blancas.
    (ii) Ambas sean del mismo color.

11. Una urna contiene b bolas blancas, r bolas rojas y a bolas azules ($n = a+b+r$). Se extraen sucesivamente y al azar tres bolas sin reposición. Calcule la probabilidad de:
    (i) Obtener al menos dos bolas de colores distintos. Evalúe numéricamente el caso $a = 3, b = 5, r = 4$.
    (ii) Obtener exactamente dos colores distintos. Evalúe numéricamente el caso $a = 3, b = 5, r = 4$.
    (iii) Sabiendo que han salido exactamente tres bolas del mismo color, calcular la probabilidad de que éstas sean de color rojo. Evalúe numéricamente el caso $a = 3, b = 5, r = 4$.

12. Un cajón contiene b calcetines blancos, r rojos y a azules ($n = a+b+r$). Se extraen calcetines al azar del cajón, uno tras otro y sin reposición, hasta tener un par del mismo color. Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:
    (i) El par (del mismo color) se obtiene al sacar el k-ésimo calcetín, para $1 \leq k \leq n$.
    (ii) El par seleccionado es de color blanco (azul, rojo).
    (iii) El par se obtiene en la tercera extracción, sabiendo que es rojo.

13. Se dispone de dos urnas, I y II. En la urna I hay m_1 bolitas blancas y n_1 negras; en la urna II hay m_2 blancas y n_2 negras. En un primer esquema de extracción se selecciona una urna (la urna I con probabilidad p_1 y la II con probabilidad p_2) y luego, de la urna seleccionada se extrae una bolita al azar. En el segundo esquema las bolitas de ambas urnas se juntan y se extrae al azar una bolita. Calcule la probabilidad de obtener una bolita blanca en cada uno de los esquemas descritos y muestre que ambos valores coinciden si p_1 y p_2 se escogen proporcionales a los tamaños (número total de bolitas) de las respectivas urnas.

14. Una caja contiene n fichas, de las cuales m son blancas. Se lanza una ruleta con k valores $1, 2, \ldots, k$ (equiprobables) y luego se escoge al azar una cantidad de fichas igual al resultado de la ruleta. Calcule la probabilidad de que todas las fichas escogidas sean blancas. Evalúe numéricamente el caso $n = 10, m = 4, k = 6$.

15. Un comerciante recibe un lote de relojes importados de Asia. El lote proviene, ya sea de una fábrica en Taiwan o bien, de una fábrica de Singapur. La fábrica de Singapur produce en promedio un reloj defectuoso por cada 200 pero la de Taiwan, 1 entre 1000. El comerciante examina un reloj y constata que funciona. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo reloj examinado funcione?

16. Se sabe que Pedro y Juan dicen la verdad (aleatoriamente y de manera independiente) sólo un tercio de las veces. Pedro hace una afirmación y Juan nos comunica que Pedro ha dicho la verdad. ¿Cuál es la probabilidad de que Pedro esté realmente diciendo la verdad? Indicación: considere los sucesos $A =$ "Pedro hace una afirmación verdadera (cuya veracidad Juan es capaz de detectar) y $B =$ "Juan dice la verdad". Entonces, el suceso "Juan dice que Pedro ha dicho algo verdadero" equivale a $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$.

17. Pedro, Juan y Diego son mentirosos. Cada uno de ellos dice la verdad (aleatoriamente y de manera independiente) un tercio de las veces. Pedro hace una afirmación y Diego nos dice que Juan dijo que Pedro está diciendo la verdad. ¿Cuál es la probabilidad de que Pedro esté realmente diciendo la verdad?

18. Más mentirosos. A dice la verdad 3/4 de las veces y B 4/5 de las veces. Se extrae una bolita al azar de una bolsa que contiene 9 bolitas, todas de distintos colores y ambos afirman que la bolita extraída es blanca. Demuestre que la probabilidad de que la afirmación sea cierta es 96/97.

19. Un sistema posee un interruptor automático de seguridad, que debe activarse en condiciones de falla del sistema. Suponga que la probabilidad de que el interruptor se active, dado que hay una falla es 0.99 y que la probabilidad de activarse, dado que no hay falla es 0.01. Finalmente, suponga que la probabilidad de que el sistema falle es 0.001. Calcule la probabilidad de que el sistema haya fallado, sabiendo que el interruptor de seguridad se activó.

20. Una urna de madera contiene 10 bolitas blancas y 3 rojas mientras que otra urna de plástico contiene 3 blancas y 5 rojas. Se escogen dos bolitas al azar de la urna de madera, se transfieren a la urna de plástico y luego se extrae una bolita al azar de la urna de plástico. ¿Cuál es la probabilidad de que esta última bolita sea blanca.

21. Una bolsa contiene 4 bolitas. Una es azul, una es negra y dos son rojas. Se extraen dos bolitas al azar. Sabiendo que al menos una de ellas es roja, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean rojas?