

PAUTA CONTROL 2

Prof. Marcos Alfaro

Prof. Aux. Manuel Aros

Problema 1

La duración (en segundos) de los fósforos Copihue, es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(t) = \frac{e^{-k \cdot t} + e^{-3k \cdot t}}{4} \quad t \geq 0$$

- Encuentre el valor de k
- Calcule la duración esperada del fósforo.
- Calcule la probabilidad de que el fósforo dure menos de 5s, si a los 3s aun permanece prendido.
- Cual es el numero de fósforos (N) que hay que encender para que todos duren mas de 4s, con probabilidad 0,3.
- Si el costo de fabricación es \$10, el precio de venta es \$70 pero se garantiza la devolución del 50% si el fósforo dura menos de 2s y del 100% si dura menos de 1s. ¿Cuál es la utilidad esperada de la empresa?

Sol)

a)

Se debe verificar uno de los axiomas de probabilidades:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{4} (e^{-kt} + e^{-3kt}) dt = \frac{1}{4} \left[\int_0^{\infty} e^{-kt} dt + \int_0^{\infty} e^{-3kt} dt \right] = \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{k} e^{-kt} - \frac{1}{3k} e^{-3kt} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{4k} + \frac{1}{12k}$$

$$\frac{1}{4k} + \frac{1}{12k} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{3} \quad \mathbf{1pt}$$

b)

por definición:

$$E(t) = \int_0^{\infty} \frac{t}{4} (e^{-\frac{t}{3}} + e^{-t}) dt = \frac{1}{4} \left[\int_0^{\infty} t \cdot e^{-\frac{t}{3}} dt + \int_0^{\infty} t \cdot e^{-t} dt \right] = \frac{1}{4} \left[9 e^{-\frac{t}{3}} \left(-\frac{t}{3} - 1 \right) - e^{-t} (t + 1) \right]_0^{\infty}$$

$$= 5/2 \quad \mathbf{1pt}$$

c)

$$P(t \leq 5 / t \geq 3) = \frac{p(3 \leq t \leq 5)}{P(t \geq 3)} \quad \text{Pbb condicional} \quad \mathbf{0,5pt}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \cdot \left(-3 e^{-\frac{1}{3}} - e^{-1} \right)}{\frac{1}{4} \cdot \left(-3 e^{-\frac{1}{3}} - e^{-1} \right)} = 0,503 \quad \mathbf{0,5pt}$$

d)

se pide n tal que:

$$P((t_1 \geq 4) \cap (t_2 \geq 4) \cdots \cap (t_n \geq 4)) \geq 0,3 \quad \text{como son independientes:}$$

$$\Rightarrow P(t_1 \geq 4) \cdot P(t_2 \geq 4) \cdots P(t_n \geq 4) = [P(t \geq 4)]^n \geq 0,3 \quad \mathbf{0,5pt}$$

$$P(t \geq 4) = 1/4 \cdot \left(-3e^{-\frac{1}{3}t} - e^{-t} \right) \Big|_4^\infty = 0,2023 \quad \mathbf{0,3pt}$$

$$\Rightarrow 0,2023^n \geq 0,3 \quad / \text{Ln}(\quad) \quad \mathbf{0,2pt}$$

$$\Rightarrow n \text{Ln}(0,2023) \geq \text{Ln}(0,3) \Rightarrow n \leq \frac{\text{Ln}(0,3)}{\text{Ln}(0,2023)} = 0,7 \quad \mathbf{0,5pt}$$

$\Rightarrow n = 0$ no se logra la Pbb 0,3

e)

$$U = \begin{cases} 60 & t \geq 2 \\ 25 & 1 \leq t < 2 \\ -10 & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \mathbf{0,6pt}$$

$$P(t \geq 2) = 1/4 \cdot \left(-3e^{-\frac{1}{3}t} - e^{-t} \right) \Big|_2^\infty = 0,4189 \quad \mathbf{0,2pt}$$

$$P(1 \leq t < 2) = 1/4 \cdot \left(-3e^{-\frac{1}{3}t} - e^{-t} \right) \Big|_1^2 = 0,2105 \quad \mathbf{0,2pt}$$

$$P(0 \leq t \leq 1) = 1/4 \cdot \left(-3e^{-\frac{1}{3}t} - e^{-t} \right) \Big|_0^1 = 0,3706 \quad \mathbf{0,2pt}$$

$$E(U) = 60 \cdot P(t \geq 2) + 25 \cdot P(1 \leq t < 2) + (-10)P(0 \leq t \leq 1) = 26,7 \quad \mathbf{0,3pt}$$

Problema 2

- a) Sean X e Y variables aleatorias independientes tales que X es una exponencial de parámetro λ , e Y es una uniforme en el intervalo $]-\pi, \pi]$. Sea $U = \sqrt{X} \cos Y$ y $V = \sqrt{X} \sin Y$.
Calcule la función densidad conjunta de U y V . Concluya que U y V son independientes y sus distribuciones normales de media 0 y varianza $1/2\lambda$.
- b) Las notas de cierta asignatura siguen una distribución normal de media μ y desviación estándar σ . Determinar las constantes a, b tales que la variable $Y = aX + b$ sigue una distribución normal de media μ' y desviación σ' .

Sol)**a)**Primero se calcula la densidad conjunta de X e Y :

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \text{ e } y \in]-\pi, \pi] \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \mathbf{0,5pt}$$

Luego necesitamos el jacobiano, pero antes es necesario definir x e y en función de u y v :

$$x = u^2 + v^2, \quad y = \arctan\left(\frac{v}{u}\right) \quad \text{entonces:}$$

$$J = \det \begin{pmatrix} 2 \cdot u & -v \\ \frac{-v}{u^2 + v^2} & \frac{u}{u^2 + v^2} \end{pmatrix} = \frac{2 \cdot u^2}{u^2 + v^2} + \frac{2 \cdot v^2}{u^2 + v^2} = 2 \quad \mathbf{1pt}$$

Finalmente:

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(x, y) \Big|_{x=u^2+v^2, y=\arctan(\frac{v}{u})} \times |J| = \lambda \frac{1}{2\pi} e^{-\lambda(u^2+v^2)} \cdot 2 = \lambda \frac{1}{\pi} e^{-\lambda(u^2+v^2)} \quad \mathbf{0,5pt}$$

Lo que equivale a:

$$f_{U,V}(u, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}} e^{-\frac{1}{2(1/2\lambda)} u^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}} e^{-\frac{1}{2(1/2\lambda)} v^2} \right) \quad \mathbf{1pt}$$

b)Si X sigue una normal entonces:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Para verificar que Y sigue una normal usemos cambio de variable:

$$x = \frac{y}{a} - \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{a} \quad \mathbf{0,5pt}$$

Luego:

$$f_Y(y) = f_X(x) \Big|_{x=\frac{y-b}{a}} \times \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-u\right)^2}{2\sigma^2}} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a\sigma)} e^{-\frac{(y-(au+b))^2}{2(a\sigma)^2}} \quad \mathbf{1pt}$$

Efectivamente Y sigue una normal con *media* = $a\mu + b$ y *desviacion* = $a\sigma$ **0,5pt**

Luego:

$$\mu' = a\mu + b \text{ y } \sigma' = a\sigma \Rightarrow a = \frac{\sigma'}{\sigma} \text{ y } b = \mu' - \frac{\mu \cdot \sigma'}{\sigma} \quad \mathbf{1pt}$$

Problema 3

a) Demostrar las siguientes propiedades:

I. $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$ con X,Y independientes

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY} XY dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_X f_Y XY dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X X dx \right) f_Y Y dy$$

Como $\int_{-\infty}^{\infty} f_X X dx$ no depende de y , es una cte. para la primera integral

$$\Rightarrow E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X X dx \right) f_Y Y dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X X dx \right) \times E(Y) = E(X)E(Y)$$

1pt

II. $V(x) = E(x^2) - E^2(x)$

$$V(x) = E([x - E(x)]^2)$$

$$= E(x^2 - 2xE(x) + E^2(x))$$

$$= E(x^2) - E(2xE(x)) + E(E^2(x))$$

$$\text{pero } E(x) = \text{CONSTANTE} \Rightarrow E(E(x)) = E(x) \quad \mathbf{0,5pt}$$

De la misma forma, se cumple para $E^2(x)$.

$$\Rightarrow E(x - E(x))^2 = E(x^2) - 2E(x) \times E(x) + E^2(x)$$

$$= E(x^2) - 2E^2(x) + E^2(x)$$

$$= E(x^2) - E^2(x)$$

0,5pt

III. $V(aX+b) = a^2V(X)$

$$V(aX + b) = E(aX + b - E(aX + b))^2$$

$$= E(aX + b - aE(X) - b)^2$$

$$= E(aX - aE(X))^2$$

$$= E\{(aX)^2 - 2a^2XE(X) + a^2E^2(X)\}$$

$$= E(a^2X^2) - 2a^2E(XE(X)) + a^2E^2(X)$$

$$= a^2E(X^2) - 2a^2E(X)E(X) + a^2E^2(X)$$

$$= a^2\{E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X)\}$$

$$= a^2\{E(X^2) - E^2(X)\}$$

$$= a^2V(X)$$

0,5pt

- b) Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución de Pareto de parámetros X_0, α , con $X_0 > 0$ y $\alpha > 0$ si su función densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \cdot X_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & x \geq X_0 \\ 0 & x < X_0 \end{cases}$$

Calcule la $E(x)$ y la $V(x)$.

Solución: hay que calcular $E(x)$ y $V(x)$ por definición:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{X_0}^{\infty} x \cdot \frac{\alpha \cdot X_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha \cdot X_0^\alpha \int_{X_0}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{\alpha \cdot X_0^\alpha}{-\alpha + 1} x^{-\alpha+1} \Big|_{X_0}^{\infty} = \frac{\alpha X_0}{\alpha - 1}$$

1pt

En este caso se debe suponer que $\alpha > 1$ para tener la convergencia. **0,5pt**

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_{X_0}^{\infty} x^2 \cdot \frac{\alpha \cdot X_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha \cdot X_0^\alpha \int_{X_0}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx = \frac{\alpha \cdot X_0^\alpha}{-\alpha + 2} x^{-\alpha+2} \Big|_{X_0}^{\infty} = \frac{\alpha X_0^2}{\alpha - 2}$$

1pt

En este caso se debe suponer que $\alpha > 2$ para tener la convergencia. **0,5pt**

$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2 = \frac{\alpha X_0^2}{\alpha - 2} - \frac{\alpha^2 X_0^2}{(\alpha - 1)^2} = X_0^2 \left[\frac{\alpha}{\alpha - 2} - \frac{\alpha^2}{(\alpha - 1)^2} \right] = X_0^2 \left[\frac{\alpha}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2} \right]$$

0,5pt