Universidad de Chile. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Curso de Probabilidades

Por

Marco Antonio Alfaro Sironvalle

2007

“Todo pensamiento es una tirada de dados”. S. Mallarmé.

“Su majestad el azar todo lo decide”. Voltaire

“La probabilidad no existe”. B. De Finetti.

“ No hay probabilidad en sí, sino modelos probabilísticos”. G. Matheron

“La simulación es mejor que la realidad”. R. Hamming.

“Bien sabíamos que eran muy peligrosos los mares en que nos aventurábamos y que solo teníamos una probabilidad sobre diez de salir vivos; y no obstante, nos hemos arriesgado, a causa de lo que esperábamos ganar, haciendo enmudecer el temor de los peligros probables”. Shakespeare, Enrique IV.

Capítulo I. Introducción.

I.1. Breve historia del cálculo de las probabilidades.

De manera paralela al desarrollo de la Estadística científica, se desarrolló, a partir del siglo XVII, el cálculo de probabilidades. Sus iniciadores fueron los matemáticos franceses de ese siglo, Pierre Fermat y Blaise Pascal, quienes iniciaron el estudio del cálculo de probabilidades al resolver problemas de juegos de azar propuestos por Antoine Gombaud, el caballero de Meré (1610-1684).
Blaise Pascal (1623-1662) fue quien más aportó al cálculo de probabilidades, porque sus trabajos interesaron a otros matemáticos, como Jacob Bernouilli (1654-1705) quien estructuró el cálculo de probabilidades como una disciplina orgánica.

Abraham De Moivre (1667-1754) descubrió, en 1733 la distribución normal de probabilidades, que después estudió Laplace. Esta distribución, se denomina también distribución de Gauss debido a una publicación realizada por Karl Gauss en 1809.

Pierre-Simón de Laplace (1749-1827) es una de las figuras de mayor magnitud en el desarrollo de esta disciplina. Sus trabajos se resumen en "Théorie analytique des probabilités", publicada en 1812. Aquí aparece la definición clásica de probabilidad de un suceso A: "La probabilidad de un suceso A es igual a la razón entre el número de casos favorables al suceso A y el número de todos los resultados posibles". Se asume, en esta definición que los posibles sucesos individuales del experimento son equiprobables.

La historia de las probabilidades culmina con los aportes de los matemáticos rusos Lvovich Chebishev (1821-1894), A. A. Markov (1856-1922).

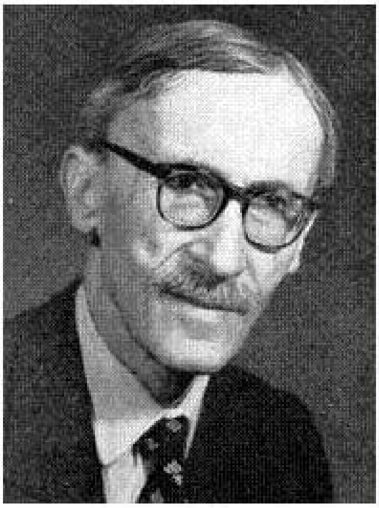
Richard Von Mises (1883-1953) define la probabilidad desde el punto de vista de las frecuencias. La probabilidad de un suceso A es igual a la frecuencia relativa con que se obtendría este suceso si el proceso se repitiera un número grande de veces en condiciones similares.

Con Andrei Kolmogorov (1903-1987) se cierra esta cronología acerca de las probabilidades, con su axiomática elaborada en 1933, inspirada en líneas filosóficas marxistas (ver Gnedenko “Theory of Probability”, Chelsea, 1965).

También habría que mencionar los trabajos de matemáticos franceses tales como Emile Borel (1871-1956), Paul Lévy (1886-1971), y los aportes más contemporáneos de William Feller (1906-1970) y Georges Matheron (1930-2000), entre otros.

El cálculo de probabilidades ha tenido éxitos espectaculares en casi todas las ramas de la ciencia, desde la física, la economía, las ciencias de la tierra, la minería, la sociología…

Chebyshev


Lévy


Kolmogorov

I.2. Introducción a la probabilidad.

Según el diccionario de la Real Academia española, la probabilidad es una medida cuantitativa del grado de posibilidad o imposibilidad de ocurrencia para un suceso determinado.

Esta medida será un número real entre 0 y 1, tal como muestra la figura I.1:

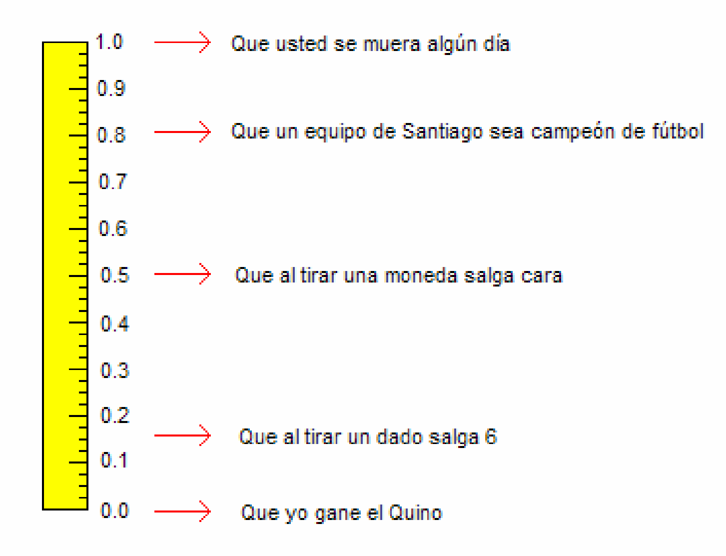


Figura I.1: La regla de las probabilidades.

La definición clásica de probabilidad.

Supongamos que queremos calcular la probabilidad del suceso A siguiente: A = ”sacar un número par al tirar un dado”

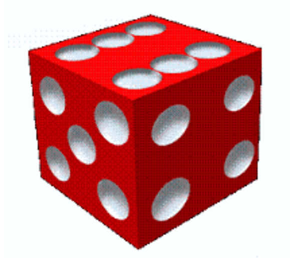


Figura I.2: Dado tirado al azar.

Aplicamos la fórmula clásica:

$$P(A) = \frac{\textit{Número de casos favorables}}{\textit{Número de casos totales}}$$

Obteniendo:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Debido a que hay 6 casos totales {1, 2, 3, 4, 5, 6} y 3 casos favorables {2, 4, 6}.

Sin embargo esta fórmula no funciona, por ejemplo, en los casos siguientes:

Ejemplo 1: Si el dado está cargado, P(A) no debería ser ½.

Ejemplo 2: Se tira al azar un chinche. Puede caer en las posiciones A o B de la figura I.3:

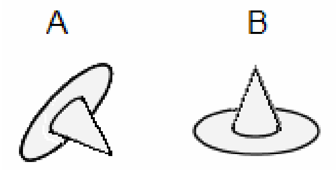


Figura I.3: Chinches.

Los casos totales son 2, con 1 caso favorable. ¿Es correcto poner P(A) = ½ ?

Ejemplo 3: Se dispara un punto al azar (es decir sin apuntar) dentro del círculo con radio r (figura I.4). Calcular la probabilidad de impactar un círculo concéntrico con radio r / 2.

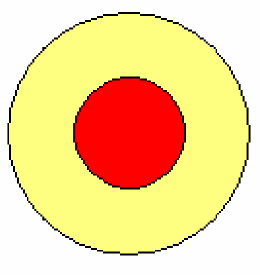


Figura I.4: Círculos

Vemos que el número de casos totales y favorables es infinito, sin embargo resulta razonable que la probabilidad de impactar dentro del círculo interior se calcula por razón de áreas:

$$P(A) = \frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

Estos ejemplos nos muestran que la fórmula clásica:

$$P(A) = \frac{\textit{Número de casos favorables}}{\textit{Número de casos totales}}$$

Es solo válida cuando todos los casos son equiprobables (por ejemplo un dado no cargado).

Pero al usar la palabra “equiprobable” llegamos a una definición circular…

La definición frecuentista de probabilidad.

La definición frecuentista de probabilidad es la siguiente: Sea A un suceso y sea n_A el número de veces que se observa la aparición de A en n repeticiones del experimento. Se define la probabilidad de A como el límite de la frecuencia relativa del suceso A:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

Esta fórmula funciona en todos los casos anteriores (por ejemplo en el caso de un dado cargado).

La figura 1.5 muestra la evolución de n_A / n al tirar n veces una moneda. Se observa una convergencia hacia 0.5.

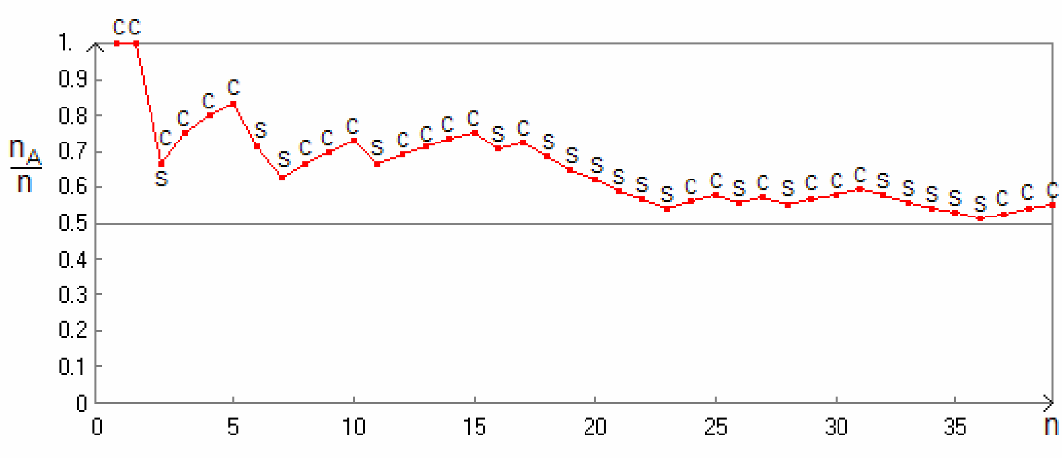


Figura I.5: Frecuencias relativas.

Desde un punto de vista práctico, la frecuencia relativa es el único procedimiento empírico para obtener probabilidades de los fenómenos repetitivos.

La definición supone que el número total de repeticiones del experimento es infinito, lo cual no se puede alcanzar en la práctica, luego la estabilidad de las frecuencias es un enunciado imposible de demostrar matemáticamente. En la práctica hay que reemplazar n por un número “grande”…

La Tabla I.1 muestra resultados experimentales de tirar una moneda.

Tabla I.1

Experimentador	Número de tiradas	Número de caras	Frecuencia relativa
Buffon	4040	2048	0.5080
Karl Pearson	12000	6019	0.5016
Karl Pearson	24000	12012	0.5005

I.3. Necesidad de una axiomática.

El cálculo de probabilidades proviene de un axiomática (desarrollada por Kolmogorov, en 1933). No se buscará definir lo que es una probabilidad “en si”, de la misma manera que en geometría no se define lo que es un punto o una recta “en si”, o en teoría de los espacios vectoriales, en que no se define lo que es un vector “en si”. La noción de espacio vectorial está ligada a un conjunto de relaciones o axiomas que los vectores deben verificar por definición.

Una vez establecidos los axiomas, la teoría se construye de manera deductiva, sin recurrir a la intuición o al control experimental.

En principio, cualquier sistema de axiomas (siempre que no sean contradictorios entre sí), puede servir para construir una teoría matemática, sin embargo los "buenos" axiomas son el producto de una fuerte reflexión de la mente, a través de generaciones humanas, cuyo objetivo constante es reducir lo más simple y general posible, las observaciones de la experiencia sensible. No es sorprendente entonces encontrar en la naturaleza objetos o fenómenos que verifican bien los "buenos" axiomas, y, por consiguiente, todas las deducciones de la teoría son aplicables a estos objetos o fenómenos.

I.4. Experimento aleatorio. Sucesos.

Se llama experimento a cualquier acción que pueda dar lugar a resultados que se pueden identificar.

Desde hace algunos años se ha comenzado a estudiar, de manera científica, los experimentos aleatorios o al azar, que son aquellos en los cuales los resultados no se pueden predecir, es decir los experimentos en los cuales las mismas causas dan lugar a resultados diferentes.
Si el resultado es siempre el mismo diremos que el experimento es determinístico.

Ejemplos de experimentos aleatorios:

E_1: Tirar un dado y ver el número que aparece.
E_2: Medir las horas de duración de una ampolleta.
E_3: Tirar una moneda hasta que aparezca por primera vez cara y contar el número de tiradas necesarias.

El espacio muestral.

Resultado : Es la información aportada por la realización de una experiencia.

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se llama espacio muestral y se designa por la letra Ω.

Ejemplos: en los casos anteriores E_1, E_2, E_3 se tienen los espacios muestrales correspondientes siguientes:

$\Omega_1 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
$\Omega_2 = \{ t : t \geq 0 \}$
$\Omega_3 = \{ 1, 2, \ldots, i, \ldots \} = N$

Sucesos

Se llama suceso a cualquier subconjunto del espacio muestral. Se utilizan letras mayúsculas, las primeras del alfabeto, para designar sucesos: A, B, C, …

Ejemplo:
Sea A = “sacar un número par al tirar un dado” = { 2, 4, 6 }.

A es un suceso ya que es un subconjunto de $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

Sea ξ un experimento aleatorio y sea A un suceso, entonces al realizar este experimento solo caben dos alternativas :

- Ocurre el suceso A.
- No ocurre el suceso A.

De acuerdo a lo anterior se definen otros tipos de sucesos. Veremos, a continuación estos sucesos. Para mayor comprensión hemos incluido los diagramas de Venn correspondientes:

Suceso Seguro

Es aquel que siempre ocurre. Es fácil ver que suceso seguro y espacio muestral son lo mismo (para que sea seguro debe tener todos los resultados posibles del experimento).

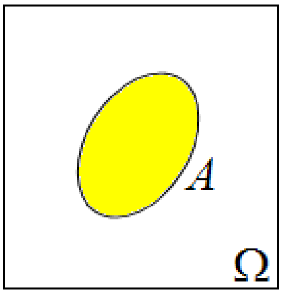


Figura I.6: El espacio muestral y un suceso A.

Lo designaremos con la letra Ω.

Suceso imposible

Es aquel que nunca ocurre. Se designa por la letra $\varnothing$.

Suceso contrario del suceso A

Sea A un suceso. El suceso contrario de A es aquel que ocurre cuando A no ocurre. Se designa por $\overline{A}$.

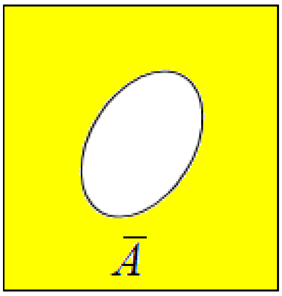


Figura I.7: Suceso contrario al suceso A.

Inclusión de sucesos

Se dice que el suceso A está contenido en el suceso B y se escribe $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ si cada vez que ocurre A ocurre B.

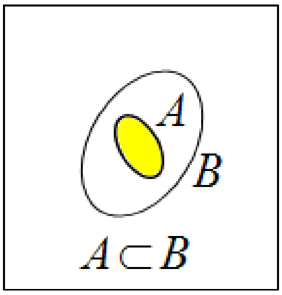


Figura I.8: A está contenido en B.

Igualdad de sucesos

Dos sucesos son iguales y se escribe A = B cuando se cumple que: $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ y $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$.

Intersección de sucesos

El suceso C intersección de A con B es el suceso que ocurre cuando A y B ocurren simultáneamente. Se escribe $C = A \cap B$.

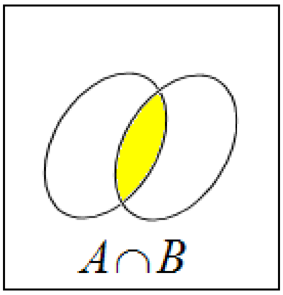


Figura I.9: Intersección de dos sucesos.

Sucesos incompatibles

Se dice que dos sucesos son incompatibles (o mutuamente excluyentes) si no pueden ocurrir simultáneamente, es decir si $A \cap B = \emptyset$.

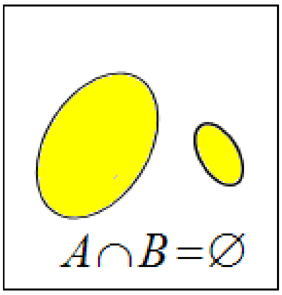


Figura I.10: Sucesos incompatibles.

Unión de sucesos

El suceso D unión de A con B es el suceso que ocurre cuando A o B o ambos simultáneamente ocurren. Se escribe $D = A \cup B$.

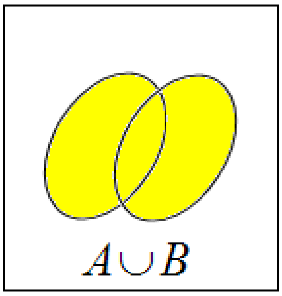


Figura I.11: Unión de dos sucesos.

Diferencia simétrica.

El suceso E, diferencia simétrica de A con B es el suceso que ocurre cuando A ocurre o cuando B ocurre pero ambos no ocurren simultáneamente. Se escribe: $E = A \Delta B$.

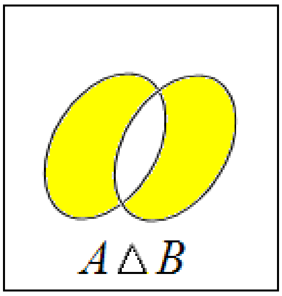


Figura I.12: Diferencia simétrica de dos sucesos.

Las operaciones de unión e intersección pueden generalizarse para cualquier número de sucesos.

Algebra de sucesos.

Es fácil verificar que se cumplen las relaciones siguientes (varias de ellas se pueden comprobar usando diagramas de Venn):

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cap A = A$$
$$A \cup A = A$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing$$
$$A \cup \Omega = \Omega$$
$$A \cap \Omega = A$$
$$\overline{\overline{A}} = A$$
$$\overline{\varnothing} = \Omega$$
$$\overline{\Omega} = \varnothing$$
$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$
$$A \cup \overline{A} = \Omega$$
$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ una sucesión de sucesos. Sean los sucesos B, C (y sus contrarios) siguientes:

$$B = \bigcap_i A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i \cap \ldots$$
$$C = \bigcup_i A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_i \cup \ldots$$
$$\overline{B} = \overline{\bigcap_i A_i} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \ldots \cup \overline{A}_i \cup \ldots$$
$$\overline{C} = \overline{\bigcup_i A_i} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_i \cap \ldots$$

El suceso B ocurre cuando <u>todos</u> los A_i ocurren.

El suceso C ocurre cuando al menos uno de los A_i ocurre.

Las fórmulas para los contrarios de B y C corresponden a las leyes de De Morgan.

También son válidas las relaciones siguientes (leyes distributivas):

$$B \cup \bigcap_i A_i = (B \cup A_1) \cap (B \cup A_2) \cap \ldots \cap (B \cup A_i) \cap \ldots$$
$$C \cap \bigcup_i A_i = (C \cap A_1) \cup (C \cap A_2) \cup \ldots \cup (C \cap A_i) \cup \ldots$$

I.5. Axiomática del cálculo de probabilidades.

Sea un conjunto Ω de elementos llamados sucesos, el cual puede ser finito o infinito. De un punto de vista práctico Ω puede ser interpretado como el conjunto de resultados posibles de un experimento ξ.

Si Ω es infinito, la noción de suceso se aplicará a una clase particular de subconjuntos privilegiados, clase que designaremos por $\mathfrak{M}$. Las proposiciones: $A \in \mathfrak{M}$ y A es un suceso, son, por definición equivalentes.
La restricción a esta clase $\mathfrak{M}$ proviene de la teoría de la medida y su justificación queda fuera del alcance de este curso. Sin embargo esta clase, llamada σ-Algebra contendrá todos los conjuntos que se pueden construir en la práctica además de todos los sucesos que la imaginación humana puede construir.

Axiomas de las σ-Algebras.

- Si $A \in \mathfrak{M} \Rightarrow \overline{A} \in \mathfrak{M}$
- Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{M} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M},\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$
- $\Omega \in \mathfrak{M}$

Una consecuencia inmediata de estos axiomas es que: $\varnothing \in \mathfrak{M}$.

Se dice entonces que $(\Omega, \mathfrak{M})$ es un <u>espacio probabilizable</u>.

Definición axiomática de probabilidad.

El sistema axiomático de Kolmogorov consta de tres axiomas:

<u>Definición</u>: Sea ξ un experimento y sea Ω el espacio muestral asociado. A cada suceso le asociamos un número real P(A) llamado probabilidad de A, el cual satisface los tres axiomas siguientes:

Axioma 1: P(A) ≥ 0

Axioma 2: P(Ω) = 1

Axioma 3: Si A y B son sucesos incompatibles (es decir $A \cap B = \varnothing$), entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

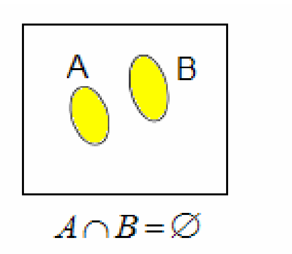


Figura I.13: Sucesos incompatibles

Axioma 3': Si A_1, A_2, …, A_n, … son sucesos incompatibles dos a dos (es decir $A_i \cap A_j = \varnothing$), entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

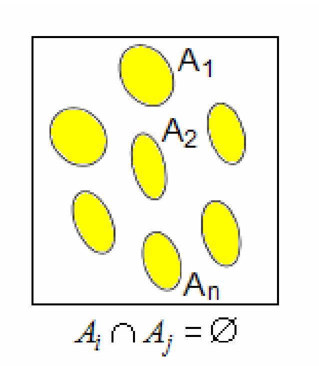


Figura I.14: Sucesos incompatibles de a dos.

<u>Observación</u>: El sistema de axiomas es <u>incompleto</u>, en el sentido que no nos dice cómo calcular la probabilidad de un suceso A. En la práctica se debe adaptar la definición de P al fenómeno que se desea estudiar, utilizando el buen sentido y una de las fórmulas que hemos discutido.

Entonces, dependiendo de las condiciones del problema, se calculara la probabilidad de un suceso A por :

- $P(A) = \dfrac{\textit{Número de casos favorables}}{\textit{Número de casos totales}}$

(siempre que todos los casos sean equiprobables)

- $P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}$

En los problemas de probabilidades geométricas, se calculará P(A) como una razón entre longitudes, áreas o volúmenes:

- $P(A)=\frac{Medida\ zona\ \ favorable}{Medida\ zona\ total}$

Es fácil de ver que estas fórmulas satisfacen bien los axiomas de las probabilidades.

Se dice que $(\Omega,\mathfrak{M},P)$ es un espacio de probabilidad.

I.6. Teoremas del cálculo de probabilidades.

Demostraremos, a partir de los axiomas, teoremas simples respecto de las probabilidades.

Teorema 1:

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

Demostración: Se tiene que:

$$A\cup\overline{A}=\Omega$$
$$A\cap\overline{A}=\varnothing$$

Al tomar probabilidad en la primera relación y luego de aplicar el axioma 3 se tiene:

$$
\begin{aligned}
&P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1 \\
&P(A) + P(\overline{A}) = 1 \\
&\Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)
\end{aligned}
$$

Esta fórmula es útil en algunas situaciones en las cuales es más simple calcular la probabilidad del suceso contrario que la probabilidad del suceso A.

Corolario:

Como:

$$
\begin{aligned}
&\varnothing = \overline{\Omega} \\
&\Rightarrow P(\varnothing) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0 \\
&P(\varnothing) = 0
\end{aligned}
$$

El suceso imposible tiene una probabilidad igual a 0.

Otra demostración de que la probabilidad del suceso imposible es nula es:

$$
\begin{aligned}
&\varnothing \cup \varnothing = \varnothing \\
&\varnothing \cap \varnothing = \varnothing \\
&\Rightarrow P(\varnothing) + P(\varnothing) = P(\varnothing) \Rightarrow P(\varnothing) = 0
\end{aligned}
$$

Teorema 2:

$$
Si \;\; A \subset B \;\;\Rightarrow\;\; P(A) \leq P(B)
$$

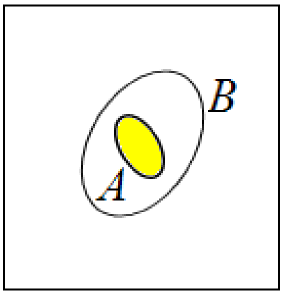


Figura I.15: Inclusión de sucesos.

Demostración: Se observa que:

$$A \cup (B \cap \overline{A}) = B$$
$$A \cap (B \cap \overline{A}) = \varnothing$$
$$P(A) + P(B \cap \overline{A}) = P(B)$$

Pero:

$$P(B \cap \overline{A}) \geq 0 \quad \Rightarrow \; P(B) \geq P(A)$$

Corolario:

Como siempre se tiene:

$$A \subset \Omega \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(\Omega) = 1$$

Entonces

$$\forall A: \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

La probabilidad de un suceso A es un número menor o igual a 1.

Teorema 3:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demostración: Consideremos el suceso $A \cap \bar{B}$, el cual está achurado en la figura I.16:

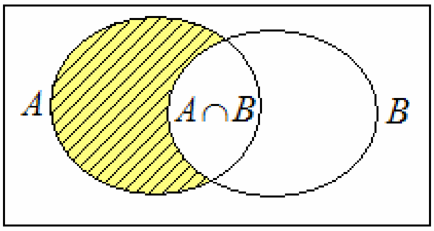
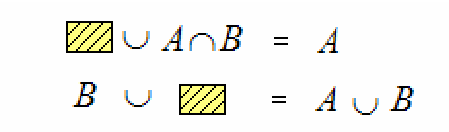
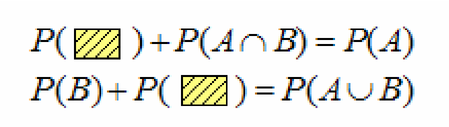


Figura I.16: Unión de dos sucesos: $A \cap B \neq \varnothing$

Se tienen las uniones entre sucesos incompatibles siguientes:



Al tomar probabilidades:



Al restar estas dos últimas ecuaciones se tiene el teorema 3:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Corolario (desigualdad de Boole):

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

Generalización: Sean 3 sucesos A, B y C:

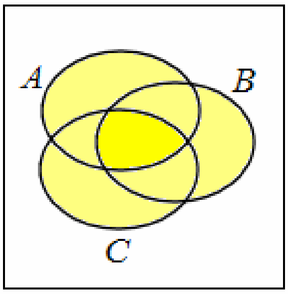


Figura I.17: Unión de tres sucesos.

En este caso se tiene:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Demostración: Sea $S = B \cap C$, luego $P(S) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$

$$P(A \cup S) = P(A) + P(S) - P(A \cap S)$$

(1) $$P(A \cup S) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap S)$$

Pero:

$$P(A \cap S) = P(A \cap (B \cup C)) = P((A \cap B) \cup (A \cap C)) =$$
$$= P(A \cap B) + P(A \cap B) - P((A \cap B) \cap (A \cap C))$$

Reemplazando en (1):

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Existe una estrecha analogía entre el área relativa y el concepto de probabilidad. Sean, en la figura I.18, a, b, c, …, f las áreas relativas de los elementos disjuntos:

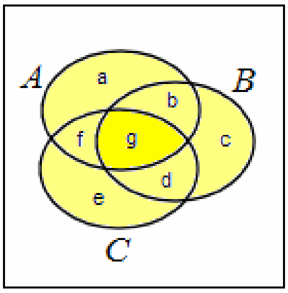


Figura I.18: Areas relativas

Se tiene entonces:

$$P(A \cup B \cup C) = a+b+c+d+e+f+g =$$
$$= (a+b+f+g)+(b+c+g+d)+(e+d+g+f)-(b+g)-(d+g)-(f+g)+g$$

Esta fórmula se puede generalizar al caso de n sucesos A_1, A_2, …, A_n:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$
$$+(-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

Que es la fórmula de Henri Poincaré. Esta última relación se puede demostrar por inducción matemática.

Teorema de la continuidad.

Sea A_1, A_2, …, A_n, … una sucesión creciente de sucesos, es decir: $A_i \subset A_{i+1}$. Definimos un nuevo suceso por:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

Entonces se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$$

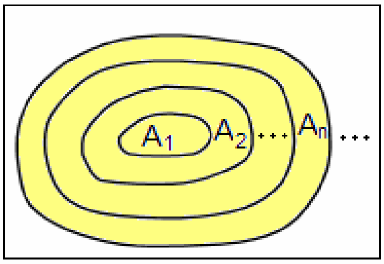


Figura I.19: Sucesión creciente de sucesos.

<u>Demostración</u>: Sean los sucesos B_i disjuntos (semejante a anillos):

$$B_1 = A_1$$
$$B_2 = A_2 \cap \overline{A}_1$$
$$\ldots$$
$$B_n = A_n \cap \overline{A}_{n-1}$$

Se tiene: $$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

Al tomar probabilidad en la primera relación:

$$P(A) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} P\left(B_i\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P\left(B_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right)$$

Debido a que:

$$\sum_{i=1}^{n} P\left(B_i\right) = P\left(A_n\right)$$

También se puede probar que si A_1, A_2, …, A_n, … es una sucesión decreciente de sucesos, es decir: $A_i \supset A_{i+1}$. Definimos un nuevo suceso por:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

Entonces también se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$$

La demostración se deja como ejercicio.

Capítulo II. Análisis combinatorio.

Espacio muestral finito.

Si Ω se puede escribir de la manera siguiente:

$$\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

Diremos que Ω es un espacio muestral finito.

Sea $p_i = P(e_i)$. Luego, según los axiomas:

$$(1) \qquad \begin{array}{l} p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 \end{array}$$

Supongamos ahora que un suceso A consta de k resultados:

$$A = \{e_{j_1}, e_{j_2}, ..., e_{j_k}\}$$

$$P(A) = P(e_{j_1}) + P(e_{j_2}) + ... + P(e_{j_k})$$

Si ahora suponemos que todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad:

$$P(e_1) = P(e_2) = ... = P(e_n)$$

Entonces, según la relación (1): $P(e_i) = 1/n$, entonces:

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\textit{Número de casos favorables al suceso A}}{\textit{Número total de casos}}$$

Hemos deducido, a partir de los axiomas, la fórmula clásica para calcular una probabilidad, la cual es válida si todos los resultados son igualmente probables.

En algunas situaciones la aplicación de esta fórmula requiere conocer el análisis combinatorio, tal como muestra este ejemplo:

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de sacar k puntos en el juego del Loto?.
En el Loto se apuesta a 6 números entre 36 números. Hay 6 números premiados, luego un jugador puede obtener 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 puntos. El problema es que hasta ahora no sabemos encontrar bien el número de casos favorables y el número de casos totales.
Dejaremos pendiente este problema…

II.1. Métodos de enumeración.

Los métodos de enumeración sirven para contar los casos favorables y totales y se basan en dos principios:

Principio de la suma.

Supongamos que un procedimiento A se puede realizar de n_A maneras y que un procedimiento B se puede realizar de n_B maneras, supongamos además que no es posible que A y B se realicen juntos. Entonces el número de maneras en que se puede hacer A ó B es $n_A + n_B$.

La figura II.1 presenta un enfoque esquemático de la situación:

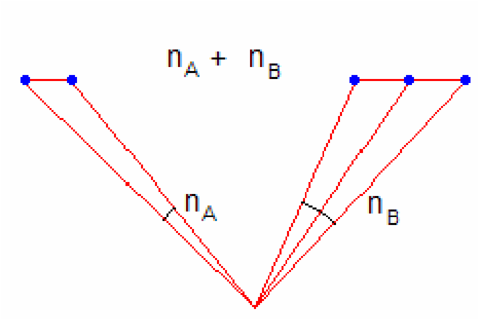


Figura II.1: Principio de la adición.

<u>Ejemplo</u>: Hay dos líneas de aviones para ir a Concepción (Lan, Avant) y tres líneas de buses (TurBus, PullmanBus, BusesAlSur). ¿De cuántas maneras diferentes se puede viajar?.
<u>Respuesta</u>: $n_A = 2$, $n_B = 3$: total = 2 + 3 = 5

Principio de la multiplicación.

Supongamos que un procedimiento A se puede realizar de n_A maneras y que un segundo procedimiento B se puede realizar de n_B maneras. Entonces el procedimiento que consta de A seguido de B se puede realizar de $n_A n_B$ maneras. La figura II.2 presenta un enfoque esquemático de la situación:

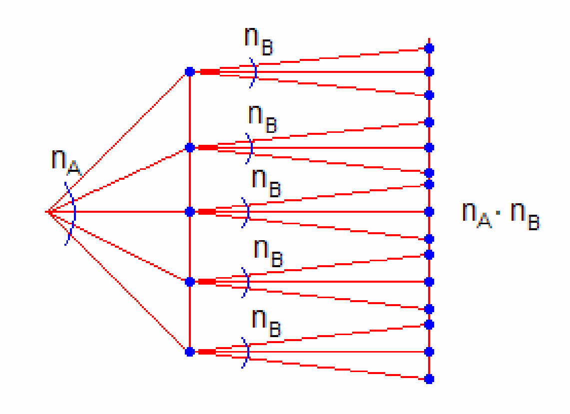


Figura II.2: Principio de la multiplicación.

Este principio puede extenderse a un número mayor de procedimientos.

Ejemplo 1: En el ejemplo anterior, de cuántas maneras se puede ir y regresar a Concepción por bus, sin tomar dos veces la misma línea de buses. Se tiene n_A = 3 y n_B = 2, luego hay 6 maneras.

Ejemplo 2: ¿Cuántos números pares de tres dígitos se pueden formar usando los dígitos 1, 2, 3, 4, 5?
El dígito de las centenas se puede elegir de 5 maneras, el de las decenas de 5 maneras y el de las unidades de dos maneras (para tener par), luego el número es: 5 * 5 * 2 = 50 números.

Permutaciones.

Supongamos que tenemos n objetos diferentes. Queremos saber el número de agrupaciones o de permutaciones diferentes ${}_nP_n$ que se pueden realizar. Por ejemplo, si tenemos los objetos a, b y c, las permutaciones son 6:

abc, acb, bac, bca, cab, cba

Luego ${}_3P_3$ = 6.

En el caso general, permutar n objetos equivale a llenar n casilleros con n objetos:

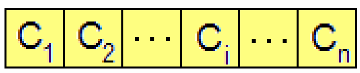


Figura II.3: Casilleros.

Razonamos de la manera siguiente:

El casillero C_1 se puede llenar de n maneras

El casillero C_2 se puede llenar de n - 1 maneras

……………………………………………………

El casillero C_n se puede llenar de 1 manera.

Luego el número total de maneras es igual a: $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$

Se tiene entonces:

$$ {}_nP_n = n! $$

El número total de permutaciones es igual a n-factorial.

Recordemos que:

$$ 0! = 1 $$
$$ n! = (n-1)!\,n $$

<u>Ejemplo</u>: De cuántas maneras puedo ordenar 4 libros en un estante. De 4! maneras, es decir 24.

Permutaciones de k objetos entre n objetos.

Consideramos n objetos diferentes. Deseamos elegir k ($n \geq k \geq 0$) de estos objetos. Por ejemplo, tenemos 4 objetos a, b, c y d y elegimos 2 de ellos. Las permutaciones ${}_2P_4$ son 10:

ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, cd, dc

Se observa que en las permutaciones el <u>orden</u> de los objetos es importante.

En el caso general, el problema consiste en llenar k casilleros con n objetos:

El casillero C_1 se puede llenar de n maneras
El casillero C_2 se puede llenar de n - 1 maneras
El casillero C_3 se puede llenar de n – 2 maneras
…………………………………………………
El casillero C_k se puede llenar de (n – k + 1) maneras

Por consiguiente:

$$_kP_n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}$$

Finalmente:

$$_kP_n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Combinaciones de k objetos entre n objetos.

Sean n objetos diferentes. De cuántas maneras podemos elegir k de estos objetos <u>sin considerar el orden</u>. En el caso de los objetos a, b, c y d, al elegir dos de ellos. Las combinaciones $_2C_4$ son 6:

ab, ac, ad, bc, bd, cd

El ejemplo siguiente nos ayudará a deducir una fórmula general para $_kC_n$: Sea n = 4 y k = 3. A partir de cada combinación formamos las combinaciones correspondientes, tal como muestra la tabla siguiente:

Combinaciones	Permutaciones
abc	abc, acb, bac, bca, cab, cba
acd	acd, adc, cad, cda, dac, dca
abd	abd, adb, bad, bda, dab, dba
bcd	bcd, bdc, cbd, cbd, dbc, dcb

Se observa que cada combinación da lugar a 3! = 6 permutaciones, luego, en general, el número de combinaciones multiplicado por k! es igual al número de permutaciones:

$$ {}_kC_n \cdot k! = {}_kP_n $$

Es decir:

$$ {}_kC_n = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} $$

Que es el conocido coeficiente que aparece en el binomio de Newton:

$$ (a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} $$

Otras propiedades de estos coeficientes son:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Estas propiedades se verifican en el triángulo de Pascal:

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

……………………………………………….

Ejemplo: En el caso del Loto, enunciado anteriormente se tiene el número de elegir las 6 apuestas es $\binom{36}{6}$. Por lo tanto, la probabilidad de tener k aciertos y 6 – k no aciertos es:

$$p_k = \frac{\binom{6}{k}\binom{30}{6-k}}{\binom{36}{6}}$$

La tabla II.1 siguiente muestra los resultados numéricos para k = 0, 1, .., 6:

Tabla II.1

k	p_k
0	0.3048452
1	0.4389771
2	0.2110467
3	0.0416882
4	0.0033499
5	0.0000924
6	0.00000051

La probabilidad de obtener 6 aciertos es bastante pequeña.

Permutaciones cuando hay objetos repetidos.

Supongamos que queremos permutar los objetos siguientes: a, a, a, b, b. Las permutaciones ${}_5P_{3,2}$ son 10:

aaabb, abaab, aabba, baaba, babaa, aabab, baaab, ababa, abbaa, bbaaa

En general, supongamos que existen k clases de objetos diferentes y que:

n_1 objetos son de la primera clase
n_2 objetos son de la clase segunda
………………………………………..
n_k objetos son de la clase n

Se cumple además que: $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

El número de permutaciones es:

$$_{n}P_{n_1,n_2,\ldots n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}{n_k}$$

Al desarrollar esta expresión, se tiene finalmente:

$$_{n}P_{n_1,n_2,\ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

En el ejemplo anterior:

$$_{5}P_{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

Capítulo III. Probabilidad condicional.

Sean A y B dos sucesos. Se sabe que el suceso B ocurrió. Nos preguntamos por la probabilidad del suceso A.

Por definición, la probabilidad condicional del suceso A dado el suceso B es:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad P(B)>0$$

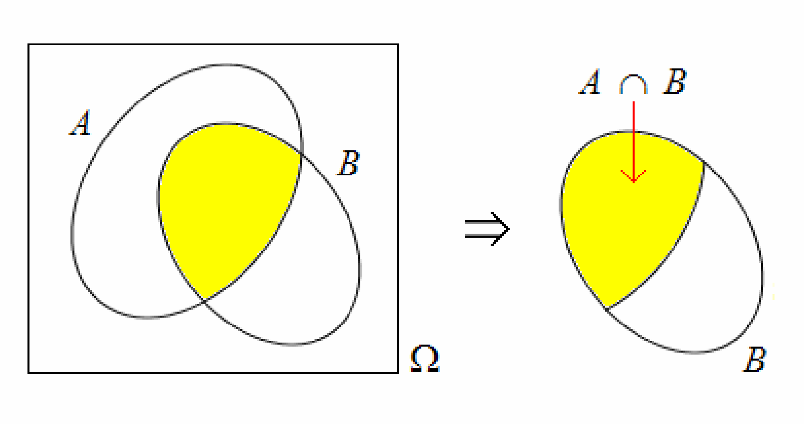


Figura III.1: Probabilidad condicional.

Justificación de la definición: al observar el diagrama de Venn (figura III.1), vemos que si B ocurrió, entonces todos los casos posibles están en B (el espacio muestral se reduce), en este nuevo espacio solo aparecerá el suceso $A\cap B$.

También se puede definir la probabilidad condicional del suceso B dado que A ocurrió como:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \qquad P(A)>0$$

Es fácil comprobar que la probabilidad condicional P(A | B) satisface los axiomas, es decir:

$$P(A \mid B) \geq 0$$
$$P(\Omega \mid B) = 1$$
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \mid B) = \sum_i P(A_i \mid B) \qquad si\ A_i \cap A_j = \varnothing \qquad i \neq j$$

Ejemplo: Se tiran dos dados, uno rojo y uno azul, al azar. Se sabe que salió un número 2 o 3 en el dado rojo. Probabilidad de que la suma de los dos dados sea 7.

Sea B = "en el dado rojo salió 2 o 3"

A = "la suma de los dados es 7"

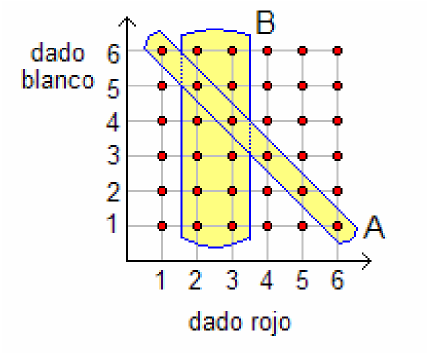


Figura II.2: Tirar dos dados.

Primer razonamiento: Como el suceso B ocurrió, el espacio muestral Ω, el cual consta de 36 elementos, se reduce al conjunto B, el cual consta de 12 elementos:

B = Ω' = {(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3.6)}

Los casos favorables al suceso A son 2:

A = {(2,5), (3,4)}

Luego: P(A | B) = 2 / 12 = 1 / 6.

<u>Segundo razonamiento</u>: Aplicando la definición de P(A|B):

P(B) = 12 / 36 = 1 / 3
P(A ∩ B) = 2 / 36 = 1 / 18
P(A | B) = P(A ∩ B) / P(B) = 1 / 6

Regla de la multiplicación:

Las ecuaciones: P(A | B) = P(A ∩ B) / P(B) y P(B | A) = P(A ∩ B) / P(A) implican que:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$$

Relación conocida como regla de la multiplicación.

<u>Ejemplo 1</u>: Sea un lote de CD de los cuales se sabe que 10 son defectuosos y 90 sin defectos. Se toman dos CD al azar, sin sustitución, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean defectuosos?.

Sea A = "el primer CD es defectuoso", B = "el segundo CD es defectuoso". Entonces:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} = \frac{1}{110}$$

<u>Ejemplo 2</u>: De una baraja inglesa de 52 cartas se sacan al azar dos cartas consecutivas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean ases?

i) Sin devolución al mazo
ii) Con devolución al mazo

Sean los sucesos:

A = “la primera carta es un as”, B = “la segunda carta es un as”. Se tiene:

i) $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{221}$

ii) $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$

Generalización.

La fórmula de la multiplicación de las probabilidades puede ser generalizada al caso de más de dos sucesos. Sean entonces los sucesos A_1, A_2, …, A_n. Se cumple que:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)...P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$$

<u>Demostración</u>:

$$\begin{aligned}
&P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)...P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) = \\
&P(A_1)\frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})} = \\
&= P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)
\end{aligned}$$

<u>Ejemplo</u>: En el ejemplo anterior, la probabilidad de sacar tres ases seguidos, sin devolución es:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid A \cap B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} = \frac{1}{5525}$$

Sucesos independientes.

En términos intuitivos, dos sucesos A y B son independientes si la ocurrencia de uno de ellos no afecta la ocurrencia del otro.
En términos formales, tenemos la definición siguiente:

Definición: Se dice que los sucesos A y B son independientes si se cumple:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Consecuencia:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$
$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

La probabilidad P(A | B) no depende de B y la probabilidad P(B | A) no depende de A.

Resulta fácil demostrar que si A y B son independientes, entonces A y $\overline{B}$ son independientes, $\overline{A}$ y B, $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes. Por ejemplo, la demostración de esta última propiedad es:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) - P(A)P(B)$$
$$= \left(1 - P(A)\right)\left(1 - P(B)\right) = P(\overline{A})P(\overline{B})$$

La definición de independencia se puede generalizar a más de 2 sucesos. Para 3 sucesos, se tiene:

Definición: Se dice que A, B y C son mutuamente independientes si se cumplen las relaciones siguientes:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad P(A \cap C) = P(A)P(C) \qquad P(B \cap C) = P(B)P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

El ejemplo siguiente demuestra que las tres primeras relaciones no implican la cuarta relación:

Ejemplo: Sea un tetraedro regular el cual se tira al azar. El resultado lo representa la cara que coincide con el plano del piso. El tetraedro está pintado de colores blanco, rojo y azul, tal como muestra la figura III.3:

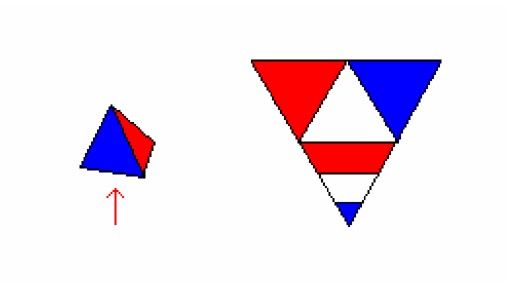


Figura III.3: Tetraedro y su desarrollo.

Sean los sucesos:

A = ”sale color blanco”
B = “sale color azul”
C = ”sale color rojo”

Se tiene:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$$

Por otra parte:

$$P(A \mid B \cap C) = 1$$

Teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes.

Deduciremos a continuación dos teoremas importantes del cálculo de probabilidades (fórmula de la probabilidad total y teorema de Bayes).

Partición de Ω.

<u>Definición</u>: Se dice que los sucesos A_1, A_2, …, A_k constituyen una <u>partición</u> del espacio muestral Ω si se cumplen las condiciones siguientes:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad si \;\; i \neq j$$

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$$

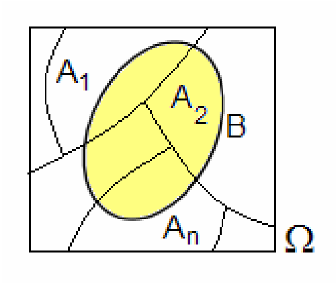


Figura III.5: Partición del espacio muestral.

En otras palabras, al hacer el experimento ξ ocurre uno y solo uno de los sucesos A_i.

Sea B un suceso respecto de Ω (figura III.5). Se tiene:

$$B = B \cap \Omega = B \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} B \cap A_i$$

Luego, al tomar probabilidades y recordando que los A_i verifican $A_i \cap A_j = \varnothing$:

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} B \cap A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

Por consiguiente:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

Conocida con el nombre de fórmula de la probabilidad total.

Ejemplo 1: La producción de DVD puede provenir de tres fábricas A_1, A_2, A_3. Se sabe que A_1 produce el doble de DVD que A_2 y que la producción de A_2 es igual a la de A_3. Se sabe también que las fábricas tienen los siguientes porcentajes de DVD defectuosos:

- A_1…………………2%
- A_2…………………3%
- A_3…………………5%

Se juntan todos los DVD, se ponen en una fila y se toma uno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que este DVD esté defectuoso?

Sean los sucesos:

A_1 = "el DVD viene de la fábrica 1"
A_2 = "el DVD viene de la fábrica 2"
A_3 = "el DVD viene de la fábrica 3"
B = "el DVD es defectuoso"

$P(A_1) = ½$, $P(A_2) = P(A_3) = ¼$
$P(B \mid A_1) = 0.02$, $P(B \mid A_2) = 0.03$, $P(B \mid A_3) = 0.05$

Luego:

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + P(A_3)P(B \mid A_3)$$
$$P(B) = 0.5 \cdot 0.02 + 0.25 \cdot 0.03 + 0.25 \cdot 0.05 = 0.03$$

Ejemplo 2: Se tienen dos urnas A_1 y A_2 las cuales contienen respectivamente 4 bolas azules 1 roja y 3 bolas azules 2 rojas. Se toma una urna al azar y luego se extrae una bola. Probabilidad de obtener una bola roja.

Una forma de representar este tipo de experimentos es mediante un árbol de probabilidades (figura III.6)

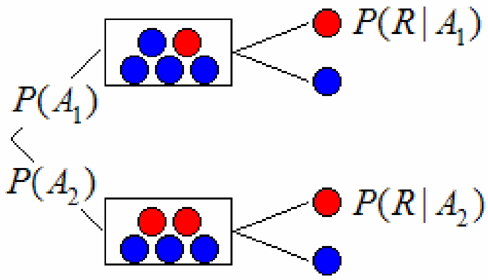


Figura III.6: Arbol de probabilidades.

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$$
$$P(R|A_1) = \frac{1}{5}$$
$$P(R|A_2) = \frac{2}{5}$$
$$P(R) = P(A_1)P(R|A_1) + P(A_2)P(R|A_2)$$
$$P(R) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = 0.3$$

Teorema de Bayes.

Supongamos que queremos calcular, en las condiciones anteriores P(A_i|B):

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i)}$$
$$\Rightarrow P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Fórmula conocida como el teorema del reverendo Bayes.

Ejemplo 1: En el ejemplo 1 anterior se toma un DVD y resulta que está malo. ¿Cuál es la probabilidad de que venga de la fábrica 3?

Nos piden $P(A_3 \mid B)$:

$$P(A_3 \mid B) = \frac{0.25 \cdot 0.05}{0.03} = 0.417$$

Ejemplo 2: En el ejemplo 2 anterior se toma una bola y resulta ser roja. La probabilidad de que esta bola venga de la urna A_2 es 0.5 * (2 / 5) / 0.3 = 2/3 = 0.667.

Capítulo IV. Complementos de probabilidades.

IV.1 Las probabilidades geométricas.

Las probabilidades geométricas se basan, por lo general, en la fórmula siguiente:

$$P(A) = \frac{Medida\ \ zona\ \ favorable}{Medida\ zona\ total}$$

La medida puede ser un largo, un área o un volumen. La fórmula supone equiprobabilidad de los casos.

Estudiaremos el tema de las probabilidades geométricas con algunos ejemplos.

<u>Ejemplo 1</u>: Supongamos que queremos calcular el área de la región R que está incluida dentro del rectángulo Q, cuya área es conocida.

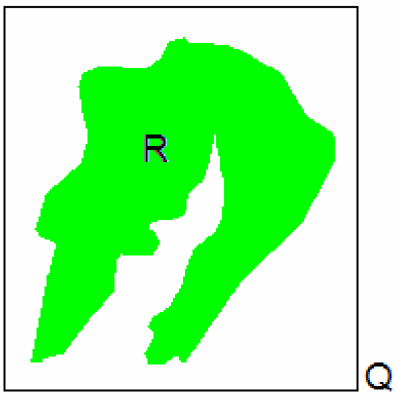


Figura IV.1: Cálculo de área por simulación

Una manera probabilística de realizar el cálculo podría ser la siguiente: tiramos n puntos al azar dentro del rectángulo Q, contando el número n_A de veces que cada punto cae dentro de la zona R. Luego según la definición frecuentista, la probabilidad de que un punto al azar en Q impacte la región R es aproximadamente n_A / n. Por consiguiente:

$$\frac{n_A}{n} \approx \frac{Area(R)}{Area(Q)} \quad \Rightarrow \quad Area(R) \approx Area(Q)\frac{n_A}{n}$$

Ejecutar el programa area.exe.

Lo que acabamos de discutir es un ejemplo de las probabilidades geométricas y la simulación se conoce como método de Montecarlo.

Ejemplo 2: El problema de los encuentros. Dos personas deciden juntarse entre las 12 y 13 horas y acuerdan esperar cada una un máximo de 20 minutos. Si las personas llegan al azar en el intervalo [12, 13]. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren?

Sea el par (x, y) que representa las llegadas de la primera y segunda persona respectivamente. Todos los puntos del cuadrado de lado 60 minutos tienen igual probabilidad de salir (figura 2):

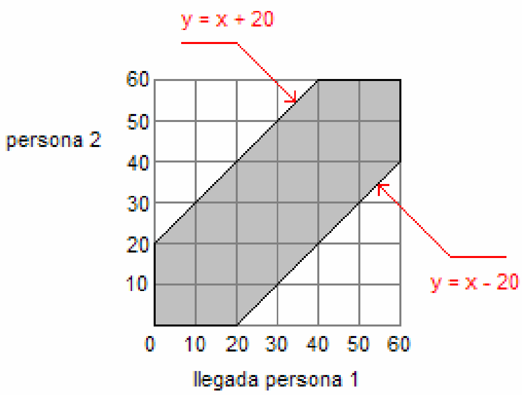


Figura IV.2: Llegadas aleatorias.

La zona favorable para que se encuentren está definida por:

$$\begin{aligned} & |x-y| \leq 20 \quad \Rightarrow \quad -20 \leq x - y \leq 20 \\ & \Rightarrow \; x - y \geq -20 \quad \text{y} \quad x - y \leq 20 \\ & \Rightarrow \; y \leq x + 20 \quad \text{y} \quad y \geq x - 20 \end{aligned}$$

Luego para que las personas se encuentren el par (x, y) debe caer en la zona gris de la figura 2, limitada por las rectas y = x – 20 y y = x + 20. Por consiguiente la probabilidad es:

$$P(A) = \frac{3600 - 1600}{3600} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} = 0.555$$

<u>Ejemplo 3</u>: La aguja de Buffon (problema planteado por Georges Louis Leclerc de Buffon en “Ensayo de aritmética moral”, 1777).

Se tiene una serie de rectas paralelas a la distancia 2ª. ¿Cuál es la probabilidad de que una aguja de largo 2d (2d < 2ª) tirada al azar corte al menos una de las rectas?

La figura 3 muestra una simulación computacional luego de tirar varias agujas:

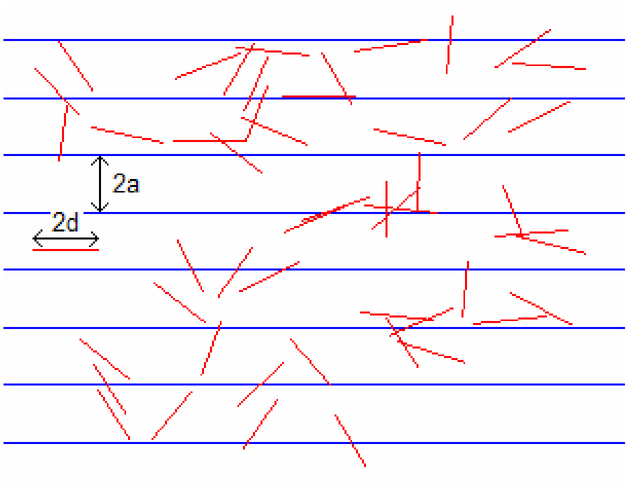


Figura IV.3: Aguja de Buffon.

Sea x la distancia entre el centro de la aguja y la paralela más próxima y sea θ el ángulo que la aguja forma con las paralelas (ver figura 4):

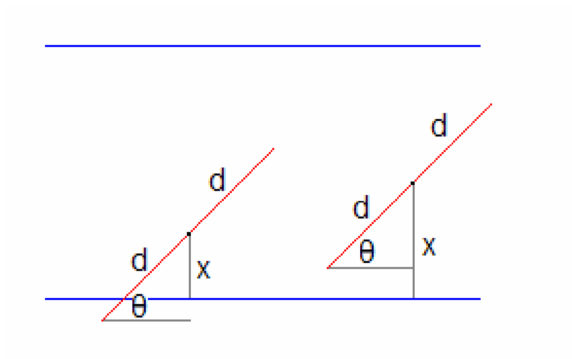


Figura IV.4: Una aguja que corta y otra que no corta.

Se observa que la aguja corta cuando se cumple que:

$$d \cdot sen(\theta) > x$$

Luego se tiene la situación siguiente, en que todos los puntos [θ, x] tienen la misma probabilidad en el rectángulo [0, π] x [0, a]:

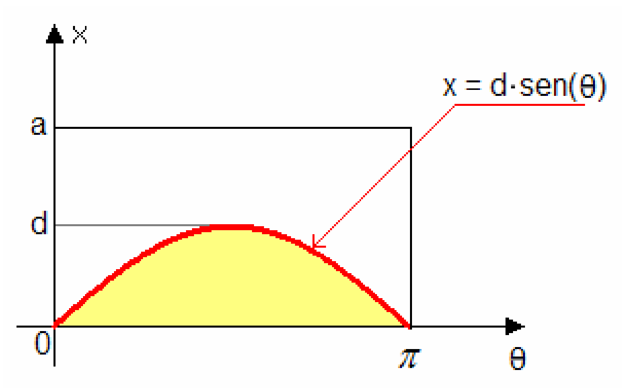


Figura 5: Zona favorable y zona total.

El área de la zona favorable es:

$$Area = \int_0^{\pi} d \cdot sen(\theta) d\theta = d\left[-cos(\theta)\right]_0^{\pi} = 2d$$

Luego:

$$Probabilidad = \frac{2d}{\pi a}$$

Lo interesante de este resultado es que permite el cálculo del número π mediante simulación probabilística (programa Buffon.exe).
La tabla siguiente resume algunos resultados de experimentadores.

Tabla IV.1

Experimentador	Año	Número de tiradas de la aguja	Valor experimental
Smith	1855	3204	3.1553
Fox	1894	1120	3.1419
Lazzarini	1901	3408	3.1415929

Si ejecutamos el programa buffon.exe encontramos sospechoso el resultado obtenido por Lazzarini.

Ejemplo 3: Un segmento rectilíneo de largo 1 se corta al azar en tres partes. Probabilidad de que con estas partes se pueda construír un triángulo.

Sean x, y las coordenadas de los puntos de quiebre. Se tienen 2 casos (a) $x > y$ o (b) $x < y$.

Para poder construír un triángulo, cada lado debe ser menor que la suma de los otros dos (en el caso (a), los lados del triángulo son y, x – y, 1 – x).
Luego se tienen 6 desigualdades simples las cuales definen la zona roja de la figura 6:

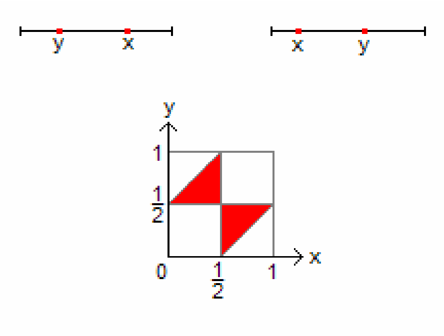


Figura 6: Probabilidad geométrica.

Luego, se tiene que la probabilidad pedida vale ¼ .

IV. 2 La probabilidad computacional.

Con el propósito de hacer más fácil la comprensión de los métodos y modelos probabilísticos, se elaboró un cierto número de programas computacionales, en el lenguaje VisualBasic 6.0 de Microsoft.

La mayoría de los programas simula problemas de la Teoría de las Probabilidades, repitiendo el experimento un número grande de veces (del orden de 1000, valor que se puede cambiar). Algunos programas tienen gráficos para ver la evolución de las probabilidades a medida que aumenta el numero de repeticiones del experimento particular.

Se recomienda, cambiar los parámetros, para entender mejor los conceptos.

En algunos problemas se proporciona la solución exacta.

Si se analizan los programas se llega a la conclusión de que es mucho más simple simular los problemas, que resolverlos de manera analítica, lo que sin duda no agrada al matemático pero si deja conforme al ingeniero porque la aproximación obtenida es aceptable (evitando complicados razonamientos de combinatoria, de probabilidades condicionales, integrales, derivadas, etc.). Sin embargo el método analítico tiene una ventaja cuando la probabilidad de un suceso A es demasiado pequeña y hay que repetir un gran número de veces el experimento para que ocurra este suceso A.

La única dificultad al resolver un problema de probabilidades por simulación es que, si se tiene la solución analítica, y los resultados de la simulación no concuerdan con esta solución, entonces tenemos una incertidumbre: el programa no es correcto o bien la solución analítica no es correcta...

Elementos de Programación.

Para una mejor comprensión de los tópicos que analizaremos se recomienda leer un manual del lenguaje VisualBasic.

La función RND.

El VisualBasic, como todos los lenguajes de programación, contiene una función para generar números aleatorios independientes entre sí, los cuales son uniformes en el intervalo [0,1), es decir $0 \le x < 1$, estos números tienen 7 decimales, luego, si:

$$x = RND$$

entonces el mínimo valor que se puede obtener es 0.0000000 y el máximo es 0.9999999.

Ejemplo: Programa para obtener 5 números al azar en [0,1):

```
For  i = 1  to  5
   x = RND
   PRINT x
Next i
```

Si se ejecuta este programa, se obtiene el resultado siguiente:

```
.7055475
.5334240
.5795186
.2895625
.3019480
```

Si se corre nuevamente el programa, se obtiene exactamente el mismo resultado. Para evitar este problema hay que poner la instrucción RANDOMIZE n (n se llama “semilla”), en el comienzo del programa. El programa queda, por ejemplo:

```
RANDOMIZE 3
For  i = 1  to  5
   x = RND
   PRINT x
Next i
```

Este programa produce otra secuencia:

```
.1387751
.8587414
.7285665
.4674189
.8933787
```

Pero si se ejecuta de nuevo aparece la misma secuencia anterior.

Luego, cada vez que se introduce una semilla distinta, se obtiene una sucesión de números aleatorios diferente. La dificultad es que hay que cambiar cada vez una semilla. Para evitar lo anterior es mejor utilizar la instrucción siguiente:

```
RANDOMIZE TIMER
```

TIMER es una función que entrega el número de segundos transcurridos desde medianoche. Con esto se evita tener que ingresar cada vez la semilla que inicializa los números aleatorios.

Ejemplos.

Para obtener un número entero al azar uniforme entre a y b (a < b):

```
x = INT((b – a + 1) * RND) + a
```

(INT es una función que entrega la parte entera de un número real).

El programa siguiente simula 20 tiradas de un dado:

```
RANDOMIZE TIMER
For  i = 1  TO  20
   dado = INT(6 * RND) + 1
   PRINT dado
Next i
```

El programa siguiente simula tirar 10 veces una moneda:

```
RANDOMIZE TIMER
For  i = 1  TO  10
   x = RND
   IF  x < 0.5 then
      PRINT "Cara"
   ELSE
      PRINT "Sello"
   END IF
NEXT i
```

Muestreo con reemplazamiento. Se tiene una serie de números x(1), x(2), ..., x(n) y se desea tomar al azar k de ellos ($k \le n$). El programa siguiente resuelve el problema:

```
RANDOMIZE TIMER
n = 5
k = 2
DIM x(n)
‘ Vector de datos
x(1) = 1 : x(2) = 2 : x(3) = 3 : x(4) = 4 : x(5) = 5
‘ Elección al azar
FOR  i = 1  TO k
   ‘ posicion = numero entre 1 y n
   posicion = INT(n * RND) + 1
   valor = x(posicion)
   PRINT valor
NEXT i
```

Observar que los valores se pueden repetir en el muestreo.

Muestreo sin reemplazamiento: las condiciones son las mismas que en el programa anterior pero los valores no se pueden repetir en la muestra de k componentes. El programa siguiente resuelve el problema:

```
RANDOMIZE TIMER
n = 5
k = 2
DIM x(n)
‘ Vector de datos
x(1) = 1 : x(2) = 2 : x(3) = 3 : x(4) = 4 : x(5) = 5
‘ Elección al azar
FOR  i = 1  TO k
   ‘ numero entre i y n
   posicion = INT((n – i + 1) * RND) + i
   SWAP  x(posicion) ,  x(i)
NEXT i
FOR  i = 1  TO k
        Print x(i)
Next i
```

(la función SWAP a , b intercambia los valores de a y de b).

Estos son los elementos en que están basados los programas de probabilidades. Con los programas anteriores se pueden simular juegos de cartas, de dados, fechas de eventos, muestreos, etc.

IV.3 Algunos problemas clásicos de probabilidades.

Los cumpleaños.

En una sala hay n personas. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos dos de ellas tengan su cumpleaños el mismo día?

Sea B = "por lo menos dos personas tienen cumpleaños el mismo día". Sea además $p_n = P(B)$.

En este caso resulta más fácil calcular la probabilidad del suceso contrario de B: "ninguna persona coincide en su fecha de cumpleaños".

Sea:

A_1 = "el cumpleaños de la persona 1 es un día cualquiera"
A_2 = "el cumpleaños de la persona 2 es diferente del de la persona 1"
A_3 = "el cumpleaños de la persona 3 es diferente del de las personas 1 y 2"
……………………………………………………………………………………..
A_n = "el cumpleaños de la persona n es diferente del de las n - 1 anteriores"

$$1-p_n = P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)...P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$$

$$1-p_n = \frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdots\frac{(365-n+1)}{365}$$

$$\Rightarrow p_n = 1-\frac{365\cdot 364\cdot 363\cdots(365-n+1)}{365^n}$$

La Tabla IV.2 siguiente resume algunos valores de p_n en función de n:

n	p_n
10	0.117
20	0.411
23	0.507
30	0.706
40	0.891
50	0.970

Esta probabilidad converge rápidamente a 1. Con 23 personas la probabilidad de ganar una apuesta es mayor que 0.5.

El problema de las cartas (Montmort, 1713).

Una secretaria escribió n cartas y las puso al azar en n sobres. ¡Cuál es la probabilidad de que por lo menos una carta esté en el sobre que le corresponde?.

Sean los sucesos:

A_1 = "la carta 1 va al sobre 1"
A_2 = "la carta 2 va al sobre 2"
…………………………………
A_n = "la carta n va al sobre n"

Entonces:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \text{"}por\ lo\ menos\ uno\ de\ los\ A_i\ ocurre\text{"}$$

Para calcular P(A) utilizaremos la fórmula de Poincaré, observando que:

$$P(A_i)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$$
$$\Rightarrow \sum P(A_i)=1$$
$$P(A_i\cap A_j)=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}$$
$$el\ número\ de\ pares\ de\ sucesos\ A_i\cap A_j\ es:\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2!}$$
$$\Rightarrow \sum_{i\neq j} P(A_i\cap A_j)=\frac{1}{2!}$$
$$Analogamente:$$
$$\sum_{i\neq j\neq k} P(A_i\cap A_j\cap A_k)=\frac{n!}{3!(n-3)!}\cdot\frac{1}{n(n-1)(n-2)}=\frac{1}{3!}$$
$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\mp...(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

Lo interesante de este resultado es que converge rapidamente hacia:

$$1-\frac{1}{e}=0.632$$

Hemos usado la conocida serie para el número e:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$$

Los programas siguientes simulan los dos problemas que hemos analizado:

Problema de los cumpleaños.

```
npersonas = 10
ndias = 365
nsimulaciones = 1000
contador = 0
ReDim x(npersonas) As Long
For i1 = 1 To nsimulaciones
  For i = 1 To npersonas
    k = randint(1, ndias)     ‘ numero al azar entre 1 y 365
    x(i) = k                  ‘ fecha de compleaños de la persona i
  Next i
  ' test para ver coincidencia
  u = 0
  For j = 1 To npersonas - 1
    For i = j + 1 To npersonas
      If x(i) = x(j) Then     ‘ coinciden en fecha de cumpleaños
        u = 1
        Exit For
      End If
    Next i
  Next j
  contador = contador + u
  probabilidad = contador / i1
  Print probabilidad
Next i1
```

Problema de la secretaria y las cartas.

```
n = 5          ‘ numero de cartas
ns = 1000   ‘ numero de simulaciones
ReDim x(n) As Long
‘ numeramos las cartas
For i = 1 To n: x(i) = i: Next i
‘ simulación
For i1 = 1 To ns
  ' revolver las cartas
  For i = n To 2 Step -1
    k = Int(Rnd * i) + 1
    temp = x(i)
    x(i) = x(k)
    x(k) = temp
  Next i
  ' test
  u = 0
  For i = 1 To n
    If x(i) = i Then
      u = 1
      Exit For
    End If
  Next i
  contador = contador + u
```

```
    probabilidad = contador / i1
    Print probabilidad
Next i1
```