

$$P2 \quad (i) \quad = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N f_i I_i = \frac{1}{n} \left[\sum_{i \in G} f_i I_i + \sum_{i \notin G} f_i I_i \right]$$

Como I_i es 0 si $i \notin G$ y 1 si $i \in G$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i \in G} f_i = S_r$$

(ii) • Necesitamos conocer la distribución de I_i .

Nuestro espacio muestral es

$$\Omega = \{ G : G \subseteq \{1, \dots, N\} \text{ y } \#G = n \}$$

La variable aleatoria I_i toma valores en este espacio, para cada G .

$$I_i(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in G \\ 0 & \text{si } i \notin G \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(I_i) = 1 \cdot P(I_i=1) + 0 \cdot P(I_i=0)$$

$$P(I_i=1) = P(\{\omega \in \Omega : I_i(\omega)=1\})$$

$$\{\omega \in \Omega : I_i(\omega)=1\} = \{\omega \in \Omega : i \in \omega\} = \{G \subseteq \{1, \dots, N\}, \#G=n, i \in G\}$$

Por lo tanto

$$P(\{\omega \in \Omega : I_i(\omega)=1\}) = \frac{\# \text{conjuntos de tamaño } n \text{ que contienen a } i}{\# \text{conjuntos de tamaño } n} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Claramente } b = \binom{N}{n}$$

(2)

Para calcular a notamos lo siguiente:

Si sacamos i de $\xi_1, \dots, \xi_N$, un conjunto de tamaño $n-1$ ahí determina un conjunto de tamaño n en $\xi_1, \dots, \xi_N$ que contiene a i .



$\Rightarrow A \cup \xi_i$ es un subconjunto de tamaño n que contiene a i .

Luego $a = \binom{N-1}{n-1}$ = # numero de conjuntos de tamaño $n-1$ en $\xi_1, \dots, \xi_N \setminus \xi_i$

$$\Rightarrow P(I_i=1) = \frac{a}{b} = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{\cancel{(N-1)!}}{\cancel{(N-1-n+1)!} \cancel{(n-1)!}} \cdot \frac{\cancel{(N-n)!} \cancel{n!}}{\cancel{N!} N} = \frac{n}{N}$$

$$\Rightarrow E(I_i) = \frac{n}{N}$$

$$.) \quad V(I_i) = E(I_i^2) - E(I_i)^2$$

Como I_i es binaria $E(I_i^2) = E(I_i)$ // si no cachon calcularlo!

$$V(I_i) = \frac{n}{N} - \frac{n^2}{N^2} = \frac{n}{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

$$\cdot) \operatorname{Cov}(I_i, I_j) = E(I_i I_j) - E(I_i)E(I_j)$$

$$E(I_i I_j) = 1 P(I_i I_j = 1) + 0 P(I_i I_j = 0)$$

Este es el paso estrella:

$$P(I_i I_j = 1) = P(\{\omega \in \Omega : I_i(\omega) I_j(\omega) = 1\})$$

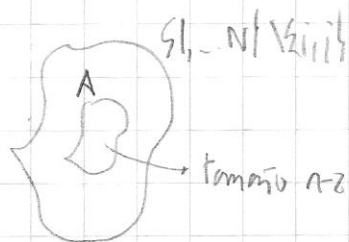
$$\text{Como } I_i(\omega) I_j(\omega) = 1 \Leftrightarrow i \in \omega \wedge j \in \omega$$

$$\Rightarrow P(I_i I_j = 1) = \frac{\# \text{ conjuntos de tamaño } n \text{ que contienen a } i \text{ y } j}{\# \text{ conjuntos de tamaño } n} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Nuevamente } b = \binom{N}{n}$$

Ahora hacemos algo similar.

Un qto de tamaño n que contiene a i y j que unicamente determinado por un conjunto de tamaño $n-2$ en $S_1, \dots, S_N \setminus \{i, j\}$



$\Rightarrow A \cup \{i, j\}$ es de tamaño n y contiene a i y j .

$$\text{Luego } a = \binom{N-2}{n-2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N-2}{n-2} \binom{N-2}{n-2}} = \frac{(n-1)n}{(N-1)N}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Cov}(I_1, I_2) = \frac{1}{N} \left(\frac{n-1}{N-1} \right) - \frac{n^2}{N^2} = \frac{1}{N} \left(\frac{n-1}{N-1} - \frac{n}{N} \right)$$

$$(iii) E(S) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N f_i E(I_i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{N}{N} \sum_{i=1}^N f_i = f$$

$$V(S) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^N f_i^2 V(I_i) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N f_i f_j \text{cov}(I_i, I_j)$$

$$= \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^N f_i^2 \underbrace{\frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right)}_{\frac{(N-1)}{N}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N f_i f_j \underbrace{\frac{1}{N} \left(\frac{N-1}{N-1} - \frac{1}{N}\right)}_{\frac{N(N-1) - (N-1)N}{(N-1)N} = -\frac{(N-1)}{(N-1)N}} \right]$$

Factorización Mágica

$$= \frac{N(N-1)}{n^2(N-1)} \left[\frac{N-1}{N^2} \sum_{i=1}^N f_i^2 - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N f_i f_j \right]$$

$$= \frac{(N-1)}{n(N-1)} \left[\frac{N-1}{N^2} \sum_{i=1}^N f_i^2 - \underbrace{\left[\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N f_i^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N f_i f_j \right]}_{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i \right)^2 = f^2} \right]$$

$$= \frac{N-1}{n(N-1)} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i^2 - f^2 \right]$$

Como f_i es binaria $f_i^2 = f_i$ (es 0 o 1)

$$= \frac{N-1}{n(N-1)} \left[f - f^2 \right] = \frac{N-1}{n(N-1)} f(1-f).$$

(5)

$$b) \rightarrow \text{cov}(X_i - \bar{X}, \bar{X}) = E((X_i - \bar{X})\bar{X}) - E(X_i - \bar{X})E(\bar{X})$$

$$E(X_i\bar{X} - \bar{X}^2) = E(X_i\bar{X}) - E(\bar{X}^2)$$

$$E(X_i\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E(X_i X_j) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \text{cov}(X_i, X_j) + E(X_i)E(X_j) + \frac{1}{n} V(X_i) + E(X_i)^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E(X_i)E(X_j) + \frac{1}{n} V(X_i) = E(X_i)E(\bar{X}) + \frac{1}{n} V(X_i)$$

$$E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + E(\bar{X})^2$$

$$\text{cov}(X_i - \bar{X}, \bar{X}) = E(X_i)E(\bar{X}) + \frac{1}{n} V(X_i) - V(\bar{X}) - E(\bar{X})^2 = E(X_i)E(\bar{X}) + E(\bar{X})^2$$

$$V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\Rightarrow \text{cov}(X_i - \bar{X}, \bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

c) Si son normales independientes entonces $\bar{X}$ y $X_i - \bar{X}$ son normales y como $\text{cov}(\bar{X}, X_i - \bar{X}) = 0$ entonces son ind. Notemos que en el caso general no se tiene esta implicación.

P3] a) (i) Debemos imponer que la densidad integre 1

$$f_{X,Y}^{(X,Y)} = \mathbb{1}_{[-1,1]}^{(X)} \mathbb{1}_{[-1,1]}^{(Y)} \cdot C$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[-1,1]}^{(X)} \mathbb{1}_{[-1,1]}^{(Y)} \cdot C \, dx dy = C \cdot 4 \quad \begin{array}{l} \text{// Es el área en un cuadrado de} \\ \text{// lado 2} \end{array}$$

Imponemos $C \cdot 4 = 1 \Rightarrow C = 1/4$

(ii) Calculemos la densidad marginal de X

$$f_X^{(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}^{(X,Y)} \, dy = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \mathbb{1}_{[-1,1]}^{(X)} \, dy = \frac{1}{4} \mathbb{1}_{[-1,1]}^{(X)} \cdot 2 = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}^{(X)}$$

Luego $X \sim \text{Unif}[-1,1]$ por simetría $Y \sim \text{Unif}[-1,1]$ y claramente $f_{X,Y}^{(X,Y)} = f_X^{(X)} f_Y^{(Y)}$ por lo que X e Y son independientes

(ii) $P(X^2 + Y^2 \leq 1) = P\left(\frac{X}{Y} \in \bar{B}(0,1)\right)$ donde $\bar{B}(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Por lo tanto

$$P\left(\frac{X}{Y} \in \bar{B}(0,1)\right) = \iint_{\bar{B}(0,1)} f_{X,Y}^{(X,Y)} \, dx dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \mathbb{1}_{[0,1]}^{(X)} \mathbb{1}_{[0,1]}^{(Y)} \cdot \frac{1}{4} \, dy dx$$

$$= \frac{1}{4} \underbrace{\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} 1 \, dy dx}_{\text{área del círculo unitario}} = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$$

(2)

$$b) \quad P(X \cdot Y \leq 3) = 1 - P(X \cdot Y > 3)$$

Los únicos valores que nos interesan son los del soporte, el único que satisface $X \cdot Y > 3$ es $(X, Y) = (2, 2)$.

$$\text{Luego } P(X \cdot Y > 3) = p_{X,Y}(2, 2) \Rightarrow P(X \cdot Y \leq 3) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$P(X + Y > 2) = 1 - P(X + Y \leq 2)$$

Y el único que satisface $X + Y \leq 2$ es $(X, Y) = (1, 1)$

$$\Rightarrow P(X + Y \leq 2) = p_{X,Y}(1, 1) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(X + Y > 2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$