Auxiliar
MA34A

Prof: Alejandro Maass
Auxs: Felipe Olmos, Gonzalo Ríos

20 de abril de 2007

Cilindros y Experimentos "Infinitos"

En esta parte tratamos con experimentos que no tienen una duración definida en el tiempo en particular nos concentraremos en los del tipo "*lanzar una moneda hasta que algo suceda*" .

Como a priori el "*algo suceda*" puede suceder en cualquier instante es necesario asumir que el experimento durará para siempre.

Necesitamos entonces un espacio de probabilidad permita nos permita modelar este tipo de experimentos.

El espacio muestral Ω sera el de las secuencias infinitas de 0's 1's lo anotamos $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Por ejemplo un elemento de Ω es $w = 101\ldots$, donde "$\ldots$" indica que hay puros 1's de ahí en adelante. Esto lo podemos anotar más formalmente como :

$$w = w_0 w_1 w_2 w_3 w_4 \ldots = (w_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

donde $w_0 = 1$, $w_1 = 0$ y $w_i = 1 \quad \forall i \geq 2$

Ahora necesitamos una σ-álgebra para Ω. Para ello definimos un subconjunto de $\mathcal{P}(\Omega)$, los *cilindros*, (que denotaremos $\mathcal{C}$). Decimos que $C \in \mathcal{C}$ ssi :

$$\exists i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}\ ,\ w_1, w_2 \ldots w_k \in \{0,1\}$$

tales que :

$$\forall w \in C\ :\ w_{i_1} = i_1 \ldots w_{i_k} = i_k$$

En castellano un cilindro C es un conjunto tal que todo elemento en el tiene un numero finito de coordenadas con un valores fijos y el resto libres . Y todos los elementos en un cilindro en particular tienen las mismas coordenadas fijas.

Es facil probar que estos conjuntos no son una σ-álgebra, por lo que la que usaremos para el espacio de probabilidad será la generada por $\mathcal{C}$. Esto es la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{C}$:

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\beta\ s.alg.\ ,\ \mathcal{C}\subseteq\beta} \beta$$

Pregunta 1

En el contexto de lo anterior definimos los siguientes conjuntos

$$\mathcal{C}_1 = \{C \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\ |\exists\ k \in \mathbb{N},\ d_0 \ldots d_{k-1} \in \{0,1\}\ tq$$
$$\forall\ w \in C\ , w_0 = d_0\ \ldots w_{k-1} = d_{k-1}\}$$

osea los cilindros que tienen fijas las primeras coordenaadas

$$\mathcal{C}_2 = \{C \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\ |\exists\ k, l \in \mathbb{N},\ d_0 \ldots d_{k-1} \in \{0,1\}\ tq$$
$$\forall\ w \in C\ , w_l = d_0\ \ldots w_{l+k-1} = d_{k-1}\}$$

esto es, los cilindros que tienen fijas k coordenadas contiguas a partir de la l-ésima (cada cilindro tiene un k , l particular).

Muestre que :

(a) Los elementos de $\mathcal{C}_2$ pueden expresarse como uniones de elementos de $\mathcal{C}_1$.

(b) Los elementos de $\mathcal{C}$ pueden expresarse como uniones de elementos de $\mathcal{C}_2$

(c) Concluya que

$$\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2) = \sigma(\mathcal{C})$$

A un elemento de $\mathcal{C}_2$ se anotara $[d_1, \ldots, d_k]_l$ donde k, l y $d_1 \ldots d_k$ significan los mismo que en la definición. Con esta notación los elementos de $\mathcal{C}_1$ son de la forma $[d_1, \ldots, d_k]_0$.

Para definir la probabilidad primero lo haremos en $\mathcal{C}_1$, si en el experimento la probabilidad que salga 1 es p y que salga 0 es $1-p$ la probabilidad del cilindro $[d_1,\ldots,d_k]_0$ será :

$$\mathbb{P}\left([d_1,\ldots,d_k]_0\right)=\prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}(d_i)=p^{\sum_{i=0}^{k-1}d_i}\left(1-p\right)^{k-\sum_{i=0}^{k-1}d_i}$$

La estructura de $\mathcal{C}$ y de $\mathbb{P}$ satisfacen las hipótesis del "Teorema de consistencia de Kolmogorov" (teoría de la medida) que asegura que existe una medida de probabilidad que extiende a $\mathbb{P}$ de $\mathcal{C}$ a $\sigma(\mathcal{C})$.

Problema 2

Consideramos el espacio de probabilidad $(\Omega,\sigma(\mathcal{C}),\mathbb{P})$ como en la parte anterior. Definimos $\rho = 1-2p$, sea $n \geq 1$. Demuestre que :

$$\mathbb{P}\left(\{\omega\in\Omega \mid \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i=0\}\right)=\frac{1}{2}(1+\rho^n)$$

y concluya que $\mathbb{P}\left(\{\omega\in\Omega \mid \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i=0\}\right)\to\frac{1}{2}$ si $n\to\infty$.