Ejemplos Problemas Modelación en Optimizacion

Profesor Dr. Gonzalo Hernandez

UChile - Departamento de Ingeniería Matemática

1) Consideremos el problema de determinar el plan de producción de 1 producto a lo largo del próximo año. Este plan de producción considera 6 etapas, cada una de 2 meses. Los datos relevantes para determinar este plan se muestran en la siguiente tabla. Los costos de producción involucran todo lo relacionado a la producción del producto, salvo los costos de almacenamiento que son 2 \$/ton de etapa en etapa. Inicialmente, en la etapa 1, supondremos que existen 500 ton de producto en bodega y se quiere terminar el año con la misma cantidad en bodega. Encuentre un modelo lineal de tal manera de maximizar beneficios, respetando restricciones de capacidad y tomando en cuenta las restricciones de inventario en la etapa final del programa. ¿Qué otra información, datos, parámetros o variables, podría considerar este modelo?

Etapa	Costos de Producción (\$/ton)	Capacidad de Producción (ton.)	Demanda Estimada (ton)	Precio Venta Estimado (\$/ton)
1	20	1500	1100	180
2	25	2000	1500	180
3	30	2200	1800	250
4	40	3000	1600	270
5	50	2700	2300	300
6	60	2500	2500	320

2) Supongamos que una compañía produce un cierto producto para alcanzar una demanda conocida y que la programación debe ser determinada sobre un total de k períodos. La demanda durante algún período puede ser satisfecha a través del inventario al inicio de un período y de la producción durante el período. La máxima producción durante algún período está restringida por la capacidad de producción dada por b unidades. Un trabajo temporal puede ser contratado o eliminado cuando sea necesario. Sin embargo, para disuadir las fluctuaciones de fuerza de trabajo, se considera un costo proporcional al cuadrado de la diferencia en la fuerza de trabajo dos períodos sucesivos. También, se considera un costo proporcional

de mantener inventario desde un período a otro. Determine un modelo matemático que entregue la fuerza de trabajo y el inventario durante los períodos $1, ..., k$ de manera que la demanda sea satisfecha y el costo total sea minimizado. Asuma un inventario inicial I_0 y una fuerza de trabajo inicial L_0 conocidos, d_k demanda conocida durante el período k, y p es el número de unidades producidas por unidad de fuerza de trabajo durante cualquier período.

3) Consideremos el problema de determinar el **plan de producción** de n productos durante un período de tiempo compuesto por T etapas. Los datos o parámetros relevantes para determinar este plan son los siguientes:

d_{it}	:	Estimación de demanda del producto i en la etapa t
a_{jit}	:	# Recurso j necesario para producir 1 unidad producto i en la etapa t
b_{jt}	:	# Total de Recurso j disponible en etapa t
U_{it}	:	Capacidad Máxima de Producción producto i en la etapa t
w_{it}	:	# hh necesarias para producir 1 unidad producto i en la etapa t
F_t	:	# Total de hh disponibles en etapa t
q_{it}	:	Costos fijos (setup) de producción producto i en la etapa t
p_{it}	:	Costos unitarios de producción producto i en la etapa t
f_{it}	:	Costos unitarios de hh producto i en la etapa t
s_{it}	:	Costos unitarios de inventario de producto i en la etapa t
I_{i0}	:	Nivel Inicial de Inventario de producto i
I_{iT}	:	Nivel Final de Inventario de producto i

Construya un modelo matemático que permita determinar las cantidades que se deben producir de c/u de los productos en c/u de la etapas del plan de producción, de tal manera de minimizar costos, respetando restricciones de capacidad, demanda, recursos disponibles, etc, y tomando en cuenta las restricciones de inventario en la etapa final del programa. ¿ Qué otra información, datos, parámetros o variables, podría considerar este modelo ? (Deficit de Inventario, fuerza de trabajo variable, etc).

4) Una compañia tiene 2 fábricas,una en Liverpool y otra en Brighton. Además, tiene 4 depósitos o bodegas ubicadas en Newcastle, Birmingham, Londres y Exeter. Esta compañia vende su producto a 6 consumidores $C1, ..., C6$, que pueden abastecerse de la fábrica o de los depósitos. Los costos de

distribución por tonelada de producto están dados por:

Desde → Hacia ↷	Liverp.	Brighton	Newcastle	Birming.	London	Exeter	Preferencia	Demanda
Newcastle	0.5	—						
Birming.	0.5	0.3						
London	1.0	0.5						
Exeter	0.2	0.2						
C1	1.0	2.0	—	1.0	—	—	Liverpool	50.000
C2	—	—	1.5	0.5	1.5	—	Newcastle	10.000
C3	1.5	—	0.5	0.5	2.0	0.2	Ninguna	40.000
C4	2.0	—	1.5	1.0	—	1.5	Ninguna	35.000
C5	—	—	—	0.5	0.5	0.5	Birmingham	60.000
C6	1.0	—	1.0	—	1.5	1.5	Exeter, Lond.	20.000
Capacidad	150.000	200.000	70.000	50.000	100.000	40.000		

donde el símbolo '—' denota la imposibilidad de distribución. Las 2 últimas columnas de la tabla de datos resume las preferencias de los consumidores con respecto a sus distribuidores y sus demandas de producto en toneladas. Finalmente, la última fila resume las capacidades de distribución.

(a) Determine un modelo matemático de tal manera de minimizar costos de distribución, respetando restricciones de capacidad y demanda de producto **sin tomar** en cuenta las preferencias de los consumidores.

(b) Determine un modelo matemático tal manera de minimizar costos de distribución, respetando restricciones de capacidad y demanda de producto, **tomando** en cuenta las preferencias de los consumidores.

5) Los modelos discretos de Ubicación de Facilidades, en su forma más simple, consisten en determinar en cuáles de p posibles ubicaciones, predefinidas, es necesario intalar una "facility" (Bodega, centro de distribución, planta de procesamiento, etc) de manera de satisfacer la demanda central de n clientes. En general se considera minimizar el costo total del sistema, que incluye costos fijos y variables de instalación y costos variables de distribución.

Determine el modelo de investigación de operaciones que respresenta este sistema.

En base a los modelos discretos de ubicación de facilidades, discutidos en clase formule modelos extendidos que consideren las siguientes situaciones:

a) Múltiples Productos

b) Decisiones en etapas de tiempo ($t = 1, ..., T$)

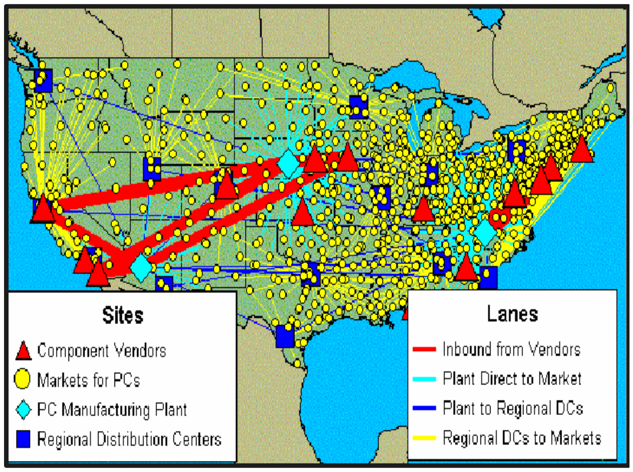

Figure 1:

c) Consideraciones de calidad de servicio, como por ejemplo radio de acción.

6) Una empresa consultora de ingeniería industrial, debe programar un número n de proyectos a lo largo de T meses. Esta programación se realiza mes a mes, i.e. un proyecto puede empezar al principio de mes y terminar al final de otro, pero una vez iniciado se completa. Sea d_i la duración en meses del proyecto i. Para realizar estos proyectos se cuenta con m tipos de recursos. Cada proyecto requiere una cantidad de recursos diferente según los meses en que se ejecuta. Sea p_{ikt} la cantidad de recurso k que necesita el proyecto i durante el mes t y b_{kt} la cantidad total de recurso k disponible durante el mes t. Para decidir cuales proyectos y a partir de qué mes deben comenzar (rentabilidad del proyecto), la empresa asocia a cada proyecto realizado un beneficio mensual r_i por cada mes desde el término hasta el fin del periodo de programación T. Determine un modelo matemático que entregue cuáles son los proyectos realizados y cual es su mes de inicio (un proyecto sólo se hace una vez), de manera que se maximicen los beneficios y se respete la disponibilidad de recursos.

7) Una gran compañía tiene oficinas en n ciudades del país. Debido a la contínua incorporación de nuevas tecnologías debe invertir en capacitación de sus empleados. Esta inversión consiste en la ubicación de centros de

capacitación en las mismas ciudades donde tiene oficinas. Las restricciones presupuestarias de la compañía determinan que a lo más es posible instalar $p \leq n$ centros. Una vez instalados, todos los empleados de una oficina que requieran capacitación serán asignados al mismo centro. Sea e_i el número de empleados de la oficina i que requieren capacitación y m_i el número promedio de veces que c/u la requiere durante el año. Sea c_{ij} es el costo de viaje entre las ciudades i y j por persona y s_i el costo de estadía promedio por persona en el centro i. Por otra parte sean f_i y g_i el costo fijo y variable de instalación del centro i. Determine un modelo matemático que entregue en cuáles ciudades se deben instalar los centros de capacitación, cuál es la capacidad de estos centros y a qué centro deben ser asignados los empleados de cada oficina, de manera de satisfacer la demanda de capacitación y respetando el tamaño de los centros a mínimo costo total del sistema. ¿ Qué otras consideraciones pueden ser tomadas en cuenta en este problema para acercarlo más a una situación real ?

8) En varios proyectos de construcción una compañia necesita vigas de acero estructural de sección transversal uniforme, pero de largos diferentes. Sea d_i , $i = 1, ..., n$ la demanda de vigas de acero de largo ℓ_i y supongamos que $\ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_n$. La compañia podría satisfacer esta demanda manteniendo en stock exactamente d_i vigas de largo ℓ_i, sin embargo el costo sería muy alto. Una alternativa es la siguiente: Si la compañia necesita una viga de largo ℓ_i que no está en inventario (en bodega) se puede cortar una viga de largo mayor que sí esté en bodega. Esta operación produce material no utilizable. Sea k_i el costo de mantener vigas de largo ℓ_i en bodega y c_i el costo de su producción. Obtener un modelo lineal del problema de manera de minimizar el costo de inventario, producción y material no utilizable, satisfaciendo la demanda de vigas.

9) La calidad del aire de una región industrial depende en gran parte de las evaporaciones de las n plantas existentes. Cada una de ellas tiene la alternativa de usar m tipos de combustibles. Sea E_j la energía total que necesita la planta j y e_{ij} la evaporación producida por unidad de combustible tipo i en la planta j. Sea c_i el costo unitario del combustible tipo i y supongamos que este tipo de combustible produce una cantidad α_{ij} de energía en la planta j. El nivel de contaminación del aire en la región no debe exceder μ microgramos de partículas por m^3, y supongamos que conocemos un parámetro η_j que relaciona la evaporación en la planta j

con la generación de partículas. Obtenga un modelo lineal que determine la mezcla de combustibles óptima que debe utilizarse en cada planta de tal manera de minimizar costos, respetar niveles de contaminación máxima y satisfacer los requerimientos energéticos. Proponga una manera de incorporar las restricciones tecnológicas que prohiben el uso de ciertas mezclas de combustibles en algunas plantas, cómo también decisiones de compra de tecnología limpia. ¿ Qué otra información, datos, parámetros o variables, podría considerar este modelo ?

10) Un número n de tareas deben ser realizadas por p microcomputadores de capacidad u_i ($i = 1, ..., p$), medida en *kop* (kilo operaciones por segundo). Estos microprocesadores están conectados por redes de comunicación cuyos costos fijo y variable de instalación por bit son f [\$] y h $\left[\frac{\$}{bit}\right]$. Las tareas poseen un requerimiento de *kop* dado por α_j ($j = 1, ..., n$) y generan un tráfico de información h_{kj} bits entre ellas cuando se ejecutan en microprocesadores diferentes. Si β_i es el costo de utilizar el microprocesador i y δ_{ij} es el costo de ejecutar la tarea j en el procesador i , formule un modelo matemático que determine cuáles microprocesadores deben ser utilizados y en cuál microprocesador se realiza cada tarea, de manera de minimizar los costos de flujos de información entre procesadores, de utilización de microprocesadores y de ejecución de tareas, respetando sus capacidades. (Todas las tareas deben hacerse y cada tarea se realiza sólo en una procesador).

11) Un grupo de estaciones generadoras de potencia eléctrica deben satisfacer la siguiente demanda diaria energética de una gran región geográfica:

etapa del día	12 $pm \rightarrow 6$ am	6 $\rightarrow$ 9 am	9 $am \rightarrow 3$ pm	3 $\rightarrow$ 6 pm	6 $\rightarrow$ 12 pm
demanda MW	15.000	30.000	25.000	40.000	27.000

Este grupo de estaciones se puede clasificar en 3 tipos, existiendo 12 delp tipo 1, 10 del tipo 2 y 5 del tipo 3. Los costos por hora involucrados en la operación de cada estación, ver tabla de datos, son de la siguiente forma: cada estación debe trabajar entre un nivel mínimo y máximo de energía. El costo de operación comienza al nivel mínimo aumentando por unidad adicional de energía consumida. Además existe un costo por inicio de uso de una estación.

Tipo Est.	Nivel Mínimo Operación $[MW]$	Nivel Máximo Operación $[MW]$	Costo Inicio Uso [\$]	Costo Hr. Niv. Mín. [\$/$hrs.$]	Costo Hora MW sobre Niv. Mín. [\$/($hrs. \times MW$)]
1	850	2000	2000	1000	2.0
2	1250	1750	1000	2600	1.3
3	1500	4000	500	3000	3.0

Determine una formulación del modelo matemático de este problema, que entregue el número de estaciones de cada tipo con sus respectivos niveles de producción de manera de satisfacer hasta un 15% adicional de los requerimientos de energía a un mínimo costo. ¿Qué otra información, datos, parámetros o variables, podría considerar este modelo?

12) Una compañia minera operará durante 5 años en una región donde tiene 4 minas de un metal, existiendo la posibilidad de operar sólo 3 minas cada año. En la tabla de datos se detallan las capacidades máximas de producción y la ley del metal extraido y los costos de mantención anuales en caso de no ser utilizadas durante un año.

Mina	Costos de Mantención (M\$/ton)	Capacidad Producción (ton.)	Ley Metal λ_m	Año	Demanda Metal (ley)	Precio Venta p_v Estimado (M\$/ton)
1	20	1500	1.0	1	0.9	10
2	25	2000	0.7	2	0.8	11
3	30	2200	1.5	3	1.2	12
4	40	3000	0.5	4	0.6	13
				5	1.0	12

Si la compañia tiene un contrato anual de obtención del metal en base a su ley, obtenga como combinación lineal de la ley de cada mina, obtenga un modelo matemático que permita determinar el plan óptimo de producción, suponiendo que los precios de venta vienen dados por $\lambda_m p_v$, donde λ_m es la ley de la mina m y una tasa de descuento del 10%. ¿ Qué otra información, datos, parámetros o variables, podría considerar este modelo ?