



Profesor: Gonzalo Hernández.
 Auxiliar: Gonzalo Ríos, Constanza Maturana
 Fecha: 19 de Abril

Control 1

Importante: En el control use aritmética finita de 4 cifras significativas con redondeo

1) (50%) Codificación e Interpolación

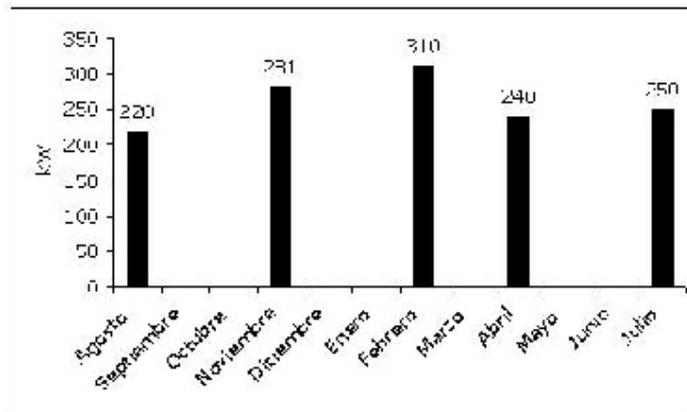
(a) Codificación

Sea S_1 el sistema de codificación de punto flotante **tipo inicial** con 5 bits de mantisa y 9 bits de exponente. Sea S_2 el sistema de codificación de punto flotante **tipo inicial** con 6 bits de mantisa y 8 bits de exponente. Compare ambos sistemas considerando:

- i) Número de bits de los sistemas
- ii) Números más grandes representables por los sistemas
- iii) Números más cercanos al cero representables por los sistemas
- iv) Menor diferencia entre un número y su consecutivo de los sistemas
- v) Representaciones redundantes de los sistemas (dos representaciones para un mismo número)

(b) Interpolación

El gasto de luz de la Sra. Raquel durante el año 2005 y 2006 está dado en el siguiente gráfico:



Ella lleva con mucho orden sus gastos anuales, pero lamentablemente se le manchó la información del año 2005 y 2006, borrándose la información de los meses de septiembre, octubre, diciembre, enero, marzo, mayo, junio.

La Sra. Raquel nos pidió que la ayudáramos a encontrar los valores borrados. Para ello:

- i) Plantee el SEL para calcular la Spline Cúbica que interpola los puntos en el gráfico. Resuélvalo mediante el método de Crout. ¿Cual spline conviene utilizar en este caso ?
- ii) Determine la Spline Cúbica que interpola los puntos que se conocen.

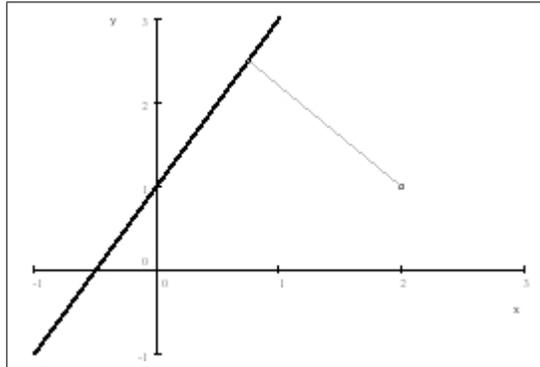
$$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3 \quad \text{para } x \in [x_k, x_{k+1}] \text{ donde}$$

$$a_k = y_k \quad b_k = \frac{a_{k+1} - a_k}{h_k} - \frac{h_k(2c_k + c_{k+1})}{3} \quad d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}$$
- iii) Encuentre el polinomio de interpolación para los puntos del gráfico. Puede utilizar cualquiera de los 3 métodos que conoce (Vandermonde, Lagrange o Newton), pero explique su selección (considere que tiene que hacer 7 evaluaciones del polinomio encontrado).
- iv) Compare los polinomios interpolantes calculados en las partes anteriores sumando el gasto de los 12 meses de la Sra. Raquel. El gasto real anual es de 270kW, encuentre el error absoluto y relativo de ambas interpolaciones. Comente.

2) (50%) Mínimos Cuadrados

(a) Mínimos Cuadrados Ortogonales Lineales

- i) Dado un punto en \mathbb{R}^2 (x_0, y_0) y una recta $y = a + bx$, calcule el punto (\hat{x}_0, \hat{y}_0) contenido en la recta que minimiza la distancia entre el punto y la recta. Demuestre que el cuadrado de la mínima distancia desde el punto (x_0, y_0) y la recta $y = a + bx$ es $h_{\min}^2 = \frac{(a - y_0 + bx_0)^2}{b^2 + 1}$.



- ii) Dados los puntos (x_i, y_i) , $i = 1 \dots n$, plantee 2 ecuaciones que determinen la recta $y = a + bx$ que minimiza la suma de los cuadrados de la mínima distancia de los puntos (x_i, y_i) a la recta $y = a + bx$.

Denote

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i &= \bar{x} & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i &= \bar{y} \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= S_x^2 & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 &= S_y^2 \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i &= S_{xy} \end{aligned}$$

Observe que se cumple: $S_x^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \bar{x}^2$

(b) Mínimos Cuadrados Ortogonales Polinomiales

Dado el polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ y un punto (x_0, y_0) , determine:

- i) La ecuación a minimizar para encontrar el punto $(\hat{x}, p(\hat{x}))$ que minimiza la distancia entre el punto (x_0, y_0) y el polinomio. Diga como encontrar el punto $(\hat{x}, p(\hat{x}))$.
- ii) La recta tangente al polinomio que pasa por el punto $(\hat{x}, p(\hat{x}))$.
- iii) El cuadrado de la mínima distancia desde el punto (x_0, y_0) y el polinomio.
- iv) Usando lo anterior, dados los puntos (x_i, y_i) , $i = 1 \dots n$, explique detalladamente como encontrar el polinomio de grado m que minimiza la suma de las mínimas distancias al cuadrado entre los puntos (x_i, y_i) y el polinomio. ¿Siempre existe? ¿Que pasa cuando $n \leq m + 1$? ¿Que pasa si $x_i = x_j$ pero $y_i \neq y_j$, con $i, j \in \{1, \dots, n\}$?

(c) Mínimos Cuadrados Standard y Ortogonales

Utilizando los puntos: $(0, 1)$, $(2, 3)$ $(3, 2)$.

- i) Calcular la recta $L1$ de aproximación usando el método anterior (Mínimos Cuadrados Ortogonales)
- ii) Calcular la recta $L2$ de aproximación por Mínimos Cuadrados Standard.
- iii) Grafique y compare $L1$ y $L2$.

Respuestas

1) Codificación e Interpolación

(a) Codificación

i. Número de bits de los sistemas

Para S_1 : 5 bits de mantisa
 9 bits de exponente
 1 bit de signo del exponente
 1 bit de signo de mantisa

Entonces ocupa: $5 + 9 + 2 = 16$ bits

Para S_2 : 6 bits de mantisa
 8 bits de exponente
 1 bit de signo del exponente
 1 bit de signo de mantisa

Entonces ocupa: $6 + 8 + 2 = 16$ bits

$\Rightarrow S_1$ y S_2 ocupan la misma cantidad de bits para codificar

ii. Números más grandes representables por los sistemas

Para S_1 :

$$x_{1\max} = (1 - 2^{-5}) \times 2^{2^9-1} = \frac{31}{32} \times 2^{511} = 6.494\,406\,966\,065\,945\,470\,106\,168\,358\,5 \times 10^{153}$$

Para S_2 :

$$x_{2\max} = (1 - 2^{-6}) \times 2^{2^8-1} = \frac{63}{64} \times 2^{255} = 5.699\,141\,892\,149\,156\,493\,503\,884\,418\,4 \times 10^{76}$$

$\Rightarrow S_1$ tiene un mayor rango que S_2 , ya que el mayor número representable en S_1 es mayor que el de S_2

iii. Números más cercanos al cero representables por los sistemas

Para S_1 :

$$x_{\min} = 2^{-5} \times 2^{-(2^9-1)} = 2^{-511-5} = 2^{-516} = 4.661\,462\,957\,000\,129\,214\,556\,853\,322\,2 \times 10^{-156}$$

Para S_2 :

$$x_{\min} = 2^{-6} \times 2^{-(2^8-1)} = 2^{-255-6} = 2^{-261} = 2.698\,802\,673\,467\,013\,945\,433\,234\,957\,1 \times 10^{-79}$$

$\Rightarrow S_1$ puede representar números mucho más pequeños que S_2

iv. Menor diferencia entre un número y su consecutivo de los sistemas

Para S_1 :

$$x = s \, se \, e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_8 \, m_1 m_2 m_3 m_4 m_5$$

$$x_{consecutivo} = s \, se \, e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_8 \, m_1 m_2 m_3 m_4 (m_5 + 1)$$

$$\Delta = |x_{consecutivo} - x| = 0 \, se \, e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_8 \, 00001$$

$$\Rightarrow \Delta = 2^{-5} \times 2^{\pm e}, \text{ donde } e = \sum_{k=0}^8 e_k 2^k$$

Como estamos buscando el mínimo $\Delta \Rightarrow se = 1$ y $e_k = 1$

$$\Rightarrow \Delta_{\min} = 2^{-5} \times 2^{-(2^9-1)} = 2^{-511-5} = 2^{-516} = 4.661\,462\,957\,000\,129\,214\,556\,853\,322\,2 \times 10^{-156}$$

Para S_2 :

$$x = s \, se \, e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 \, m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_6$$

$$x_{consecutivo} = s \, se \, e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 \, m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 (m_6 + 1)$$

$$\Delta = |x_{consecutivo} - x| = 0 \, se \, e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 \, 000001$$

$$\Rightarrow \Delta = 2^{-6} \times 2^{\pm e}, \text{ donde } e = \sum_{k=0}^7 e_k 2^k$$

Como estamos buscando el mínimo $\Delta \Rightarrow se = 1$ y $e_k = 1$

$$\Rightarrow \Delta_{\min} = 2^{-6} \times 2^{-(2^8-1)} = 2^{-255-6} = 2^{-261} = 2.698\,802\,673\,467\,013\,945\,433\,234\,957\,1 \times 10^{-79}$$

\Rightarrow La menor diferencia entre un número y su consecutivo de S_1 es menor que de S_2

v. Representaciones redundantes de los sistemas (dos representaciones para un mismo número)

El único número que tiene redundancia en cualquier sistema tipo inicial es el 0, ya que si $m = 0$, entonces para cualquier valor de s, se y e el número codificado es el cero.

Para S_1 :

$$0_1 = s \, se \, e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_8 \, 00000 \, \forall s, se, e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 \in \{0, 1\}$$

\Rightarrow hay $2^{11} = 2048$ representaciones redundantes en el sistema

Para S_2 :

$$0_2 = s \, se \, e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 \, 000000 \, \forall s, se, e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \in \{0, 1\}$$

\Rightarrow hay $2^{10} = 1024$ representaciones redundantes en el sistema

$\Rightarrow S_1$ tiene una mayor cantidad de representaciones redundantes que S_2

(b) Interpolacion

i. Sistema para la contruccion de la Spline:

$$\text{A. Libre: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -32 \\ -134 \\ 115 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Método de Crout:

$$\begin{aligned} \text{Libre: } \textit{paso1} : \quad & l_{11} = 1 \\ & u_{12} = 0 \\ & i = 2 \quad \quad \quad l_{21} = 3 \\ & \quad \quad \quad l_{22} = 12 \\ & \quad \quad \quad u_{23} = \frac{1}{4} = 0.25 \\ & i = 3 \quad \quad \quad l_{32} = 3 \\ \textit{paso2} : i = 2, 3, 4 \quad & l_{33} = \frac{37}{4} = 9.25 \\ & u_{34} = \frac{8}{37} \approx 0.2162 \\ & i = 4 \quad \quad \quad l_{43} = 2 \\ & \quad \quad \quad l_{44} = \frac{354}{37} \approx 9.568 \\ & \quad \quad \quad u_{45} = \frac{111}{354} \approx 0.3136 \\ \textit{paso3} : \quad & l_{54} = 0 \\ & l_{55} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Entonces: } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9.568 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2162 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.3136 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$y = Uc$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9.568 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ -32 \\ -134 \\ 115 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.667 \\ -13.62 \\ 14.87 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2162 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.3136 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.667 \\ -13.62 \\ 14.87 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.542 \\ -16.83 \\ 14.87 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{B. Sujeta: } \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -32 \\ -134 \\ 115 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Método de Crout:

$$\begin{aligned} \text{Sujeta: } \textit{paso1} : \quad & l_{11} = 6 \\ & u_{12} = \frac{1}{2} = 0.5 \\ & i = 2 \quad \quad \quad l_{21} = 3 \\ & \quad \quad \quad l_{22} = \frac{21}{2} = 10.5 \\ & \quad \quad \quad u_{23} = \frac{6}{21} = 0.2857 \\ & i = 3 \quad \quad \quad l_{32} = 3 \\ \textit{paso2} : i = 2, 3, 4 \quad & l_{33} = \frac{192}{21} \approx 9.143 \\ & u_{34} = \frac{42}{192} \approx 0.2188 \\ & i = 4 \quad \quad \quad l_{43} = 2 \\ & \quad \quad \quad l_{44} = \frac{1836}{192} \approx 9.562 \\ & \quad \quad \quad u_{45} = \frac{576}{1836} \approx 0.3137 \\ \textit{paso3} : \quad & l_{54} = 3 \\ & l_{55} = \frac{9288}{1836} \approx 5.059 \end{aligned}$$

$$\text{Entonces: } L = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9.143 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9.562 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5.059 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.2857 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2188 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.3137 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$y = Uc$

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9.143 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9.562 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5.059 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ -32 \\ -134 \\ 115 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.048 \\ -13.66 \\ 14.88 \\ -8.826 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.2857 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2188 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.3137 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.048 \\ -13.66 \\ 14.88 \\ -8.826 \end{bmatrix} \Rightarrow c = \begin{bmatrix} -0.979 \\ 1.958 \\ -17.52 \\ 17.65 \\ -8.826 \end{bmatrix}$$

ii. Con los datos obtenidos en la parte anterior la Spline nos queda:

A. Libre:

$$\begin{aligned} S_0 &= 220 + 18.79(x-1) + 0(x-1)^2 + 0.1713(x-1)^3 & \text{si } x \in [1, 4] \\ S_1 &= 281 + 23.42(x-4) + 1.542(x-4)^2 - 2.041(x-4)^3 & \text{si } x \in [4, 7] \\ S_2 &= 310 - 22.47(x-7) - 16.83(x-7)^2 + 5.283(x-7)^3 & \text{si } x \in [7, 9] \\ S_3 &= 240 - 26.41(x-9) + 14.87(x-9)^2 - 1.652(x-9)^3 & \text{si } x \in [9, 12] \end{aligned}$$

B. Sujeta:

$$\begin{aligned} S_0 &= 220 + 18.37(x-1) - 0.979(x-1)^2 + 0.3263(x-1)^3 & \text{si } x \in [1, 4] \\ S_1 &= 281 + 40.79(x-4) + 1.958(x-4)^2 - 2.164(x-4)^3 & \text{si } x \in [4, 7] \\ S_2 &= 310 - 35.17(x-7) - 17.52(x-7)^2 + 5.862(x-7)^3 & \text{si } x \in [7, 9] \\ S_3 &= 240 - 14.31(x-9) + 17.65(x-9)^2 - 2.942(x-9)^3 & \text{si } x \in [9, 12] \end{aligned}$$

iii. Newton:

x_k	y_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k \dots x_{k+2}]$	$f[x_k \dots x_{k+3}]$
1	220	$\frac{281-220}{3} = \frac{61}{3} \approx 20.33$	$\frac{9.667-20.33}{7-1} \approx -1.777$	$\frac{-8.933+1.777}{9-1} = -0.8945$	$\frac{2.075+0.8945}{12-1} \approx 0.27$
4	281	$\frac{310-281}{3} = \frac{29}{3} \approx 9.667$	$\frac{-35-9.667}{9-4} \approx -8.933$	$\frac{7.667+8.933}{12-4} = 2.075$	
7	310	$\frac{240-310}{2} = \frac{-70}{2} = -35$	$\frac{3.333+35}{12-7} \approx 7.667$		
9	240	$\frac{250-240}{3} = \frac{10}{3} = 3.333$			
12	250				

Entonces, el polinomio de Newton es:

$$p_N(x) = 220 + 20.33(x-1) - 1.777(x-1)(x-4) - 0.8945(x-1)(x-4)(x-7) + 0.27(x-1)(x-4)(x-7)(x-9)$$

iv. Evaluemos en los meses faltantes:

Spline:

A. Libre:

<i>Mes</i>	<i>kW</i>
Septiembre($x = 2$)	239
Octubre($x = 3$)	259
Diciembre($x = 5$)	303.9
Enero($x = 6$)	317.7
Marzo($x = 8$)	276
Mayo($x = 10$)	226.8
Junio($x = 11$)	233.4

B. Sujeta:

<i>Mes</i>	<i>kW</i>
Septiembre($x = 2$)	237.7
Octubre($x = 3$)	255.4
Diciembre($x = 5$)	321.6
Enero($x = 6$)	353.1
Marzo($x = 8$)	263.2
Mayo($x = 10$)	240.4
Junio($x = 11$)	258.4

Polinomio de Newton:

<i>Mes</i>	<i>kW</i>
Septiembre($x = 2$)	216
Octubre($x = 3$)	244.1
Diciembre($x = 5$)	310
Enero($x = 6$)	320.9
Marzo($x = 8$)	284.4
Mayo($x = 10$)	205.8
Junio($x = 11$)	199.7

Entonces, el promedio del gasto anual es:

Spline:

A. Libre: $220 + 281 + 310 + 240 + 250 + 239 + 259 + 303.9 + 317.7 + 276 + 226.8 + 233.4 \approx 3157$

Promedio: $\frac{3157}{12} \approx 263.1$

B. Sujeta: $220 + 281 + 310 + 240 + 250 + 237.7 + 255.4 + 321.6 + 353.1 + 263.2 + 240.4 + 258.4 \approx 3231$

Promedio: $\frac{3231}{12} = 269.3$

Newton: $220 + 281 + 310 + 240 + 250 + 216 + 244.1 + 310 + 320.9 + 284.4 + 205.8 + 199.7 \approx 3082$

Promedio: $\frac{3082}{12} = 256.8$

Entonces, la mejor aproximación es la Spline Sujeta, luego la Spline Libre y finalmente el polinomio de interpolación.

2) Mínimos cuadrados

(a) Mínimos Cuadrados Ortogonales Lineales

i) $\min h^2 = \min (x_0 - x)^2 + (y_0 - (a + bx))^2$
 $\frac{\partial h}{\partial x} = 2(x_0 - x)(-1) + 2(y_0 - (a + bx))(-b) = 0$
 $(x_0 - x) + (y_0 - (a + bx))b = 0$
 $x_0 - x + by_0 - ab - b^2x = 0$
 $x(1 + b^2) = x_0 + by_0 - ab$
 $\Rightarrow \hat{x}_0 = \frac{x_0 + by_0 - ab}{b^2 + 1}$
 $\Rightarrow \hat{y}_0 = a + b \frac{x_0 + by_0 - ab}{b^2 + 1} = \frac{bx_0 + b^2y_0 + a}{b^2 + 1}$
 $h_{\min}^2 = (\hat{x}_0 - x_0)^2 + (\hat{y}_0 - y_0)^2 = \left(\frac{x_0 + by_0 - ab}{b^2 + 1} - x_0\right)^2 + \left(\frac{bx_0 + b^2y_0 + a}{b^2 + 1} - y_0\right)^2$
 $= \left(\frac{by_0 - ab - b^2x_0}{b^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{a - y_0 + bx_0}{b^2 + 1}\right)^2 = \frac{(by_0 - ab - b^2x_0)^2 + (a - y_0 + bx_0)^2}{(b^2 + 1)^2} = \frac{(a - y_0 + bx_0)^2}{b^2 + 1}$

ii) $E_{\perp}(a, b) = \sum_{i=1}^n \frac{(a - y_i + bx_i)^2}{b^2 + 1}$
 $\frac{\partial E_{\perp}}{\partial a} = \sum_{i=1}^n \frac{2(a - y_i + bx_i)}{b^2 + 1} = 0$
 $\min E_{\perp}(a, b) \Rightarrow \frac{\partial E_{\perp}}{\partial b} = \sum_{i=1}^n \frac{2(a - y_i + bx_i)x_i(b^2 + 1) - 2b(a - y_i + bx_i)^2}{(b^2 + 1)^2} = 0$
 $\Rightarrow \sum_{i=1}^n (a - y_i + bx_i) = 0 \Rightarrow a + b\bar{x} = \bar{y}$
 $\Rightarrow \sum_{i=1}^n (a - y_i + bx_i)x_i(b^2 + 1) - b(a - y_i + bx_i)^2 = 0$
 $\sum_{i=1}^n (a - y_i + bx_i)[x_i(b^2 + 1) - b(a - y_i + bx_i)] = 0$
 $\sum_{i=1}^n (a - y_i + bx_i)[x_i b^2 + x_i - ba + by_i - b^2x_i] = 0$
 $\sum_{i=1}^n (a - y_i + bx_i)[x_i - ba + by_i] = 0$
 $\sum_{i=1}^n (a - y_i + bx_i)x_i - ab \sum_{i=0}^n (a - y_i + bx_i) + b \sum_{i=0}^n (a - y_i + bx_i)y_i = 0$
 $\sum_{i=1}^n (a - y_i + bx_i)x_i + b \sum_{i=1}^n (a - y_i + bx_i)y_i = 0$
 $a\bar{x} - S_{xy} + b\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + ab\bar{y} - b\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 + b^2 S_{xy} = 0$

Entonces tenemos el sistema

$$a + b\bar{x} = \bar{y}$$

$$a\bar{x} - S_{xy} + b\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + ab\bar{y} - b\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 + b^2 S_{xy} = 0$$

iii) Reemplazando (Esto no habia que hacerlo)

$$(\bar{y} - b\bar{x})\bar{x} - S_{xy} + b\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + (\bar{y} - b\bar{x})b\bar{y} - bS_y + b^2 S_{xy} = 0$$

$$\bar{y}\bar{x} - b\bar{x}^2 - S_{xy} + b\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + b\bar{y}^2 - b^2\bar{x}\bar{y} - b\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 + b^2 S_{xy} = 0$$

$$b^2(S_{xy} - \bar{x}\bar{y}) + b(S_x^2 - S_y^2) - (S_{xy} - \bar{x}\bar{y}) = 0$$

$$b^2 + b \frac{(S_x^2 - S_y^2)}{(S_{xy} - \bar{x}\bar{y})} - 1 = 0 \Rightarrow b = -\frac{(S_x^2 - S_y^2)}{2(S_{xy} - \bar{x}\bar{y})} \pm \sqrt{\frac{(S_x^2 - S_y^2)^2 - 4(S_{xy} - \bar{x}\bar{y})^2}{4(S_{xy} - \bar{x}\bar{y})^2}}$$

Ahora bien, si

$$\bar{y} > 0 \Rightarrow b = -\frac{(S_x^2 - S_y^2)}{2(S_{xy} - \bar{x}\bar{y})} + \sqrt{\frac{(S_x^2 - S_y^2)^2 - 4(S_{xy} - \bar{x}\bar{y})^2}{4(S_{xy} - \bar{x}\bar{y})^2}}$$

$$\bar{y} < 0 \Rightarrow b = -\frac{(S_x^2 - S_y^2)}{2(S_{xy} - \bar{x}\bar{y})} - \sqrt{\frac{(S_x^2 - S_y^2)^2 - 4(S_{xy} - \bar{x}\bar{y})^2}{4(S_{xy} - \bar{x}\bar{y})^2}}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

(b) Mínimos Cuadrados Ortogonales Polinomiales

i) Ecuación a minimizar: $\min h^2 = (x - x_0)^2 + (p(x) - y_0)^2$. Para encontrar el punto hay que derivar con respecto a x e igualar a cero. Luego, al resolver el sistema, se encontrarán n soluciones, y al evaluar h^2 en cada una de estas, se escoje la que hace a h^2 menor.

ii) La recta $y = a + b\hat{x}$ cumple que $b = p'(\hat{x})$ y $p(\hat{x}) = a + b\hat{x}$
 $\Rightarrow y(x) = p(\hat{x}) + p'(\hat{x})(x - \hat{x}) = p(\hat{x}) - \hat{x}p'(\hat{x}) + xp'(\hat{x})$ (Taylor de 1° orden)

iii) Por la parte (a) - i) $h_{\min}^2 = \frac{(a - y_0 + bx_0)^2}{b^2 + 1}$, donde $a = p(\hat{x}) - \hat{x}p'(\hat{x})$ y $b = p'(\hat{x})$
 $\Rightarrow h_{\min}^2 = \frac{(p(\hat{x}) - \hat{x}p'(\hat{x}) - y_0 + p'(\hat{x})x_0)^2}{p'(\hat{x})^2 + 1}$

iv) Dados los puntos (x_i, y_i) , $i = 1 \dots n$, el problema a minimizar es:

$$E_{\perp}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{(p(\hat{x}) - \hat{x}p'(\hat{x}) - y_i + p'(\hat{x})x_i)^2}{p'(\hat{x})^2 + 1}$$
. Para resolverlo se debe derivar según a_j , $j = 0 \dots m$, donde $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$. Luego queda un sistema de $m + 1$ ecuaciones con $m + 1$ variables no lineal a resolver. El resultado siempre existe ya que el error no es acotado superiormente pero si inferiormente, ya que siempre $E_{\perp}(p) \geq 0$, por lo que el mínimo existe. En el caso que $n \leq m + 1$, el polinomio resultante sería el polinomio interpolante, ya que en ese caso, $E_{\perp}(p) = 0$. En el caso que $x_i = x_j$ pero $y_i \neq y_j$, con $i, j \in \{1, \dots, n\}$, el método también encuentra una solución, ya que el mínimo siempre existe, pero en el caso que $n \leq m + 1$, el polinomio interpola solo los puntos con una única imagen, y se aproxima en los puntos con múltiples imágenes.

(c) Mínimos Cuadrados Ordinarios y Ortogonales

Con los puntos: $(0, 1)$, $(2, 3)$ $(3, 2)$.

i) De la parte a.ii), el sistema que resuelve es:

$$a + b\bar{x} = \bar{y}$$

$$a\bar{x} - S_{xy} + b\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + ab\bar{y} - b\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 + b^2 S_{xy} = 0$$

Donde:

$$n = 3$$

$$\bar{x} = \frac{0+2+3}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{1+3+2}{3} = 2$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 + 4 + 9 = 13$$

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1 + 9 + 4 = 14$$

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i = \frac{0+6+6}{3} = 4$$

Reemplazando:

$$a + b\frac{5}{3} = 2 \Rightarrow a = 2 - \frac{5}{3}b$$

$$a\frac{5}{3} - 4 + b\frac{13}{3} + ab2 - b\frac{14}{3} + b^2 4 = 0$$

$$\Rightarrow \left(2 - \frac{5}{3}b\right)\frac{5}{3} - 4 + b\frac{13}{3} + \left(4 - \frac{10}{3}b\right)b - b\frac{14}{3} + b^2 4 = 0$$

$$\Rightarrow b^2 + \frac{4}{3}b - 1 = 0$$

$$\Rightarrow b_1 = -1.869 \quad b_2 = \frac{1}{3}\sqrt{13} - \frac{2}{3} = 0.5352$$

como todos los $y_i > 0$

$$\Rightarrow b = 0.5352$$

$$\Rightarrow a = 1.108$$

$$L_1 = 1.108 + 0.5352x$$

ii) El sistema a resolver es:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.286 \\ 0.4286 \end{bmatrix}$$

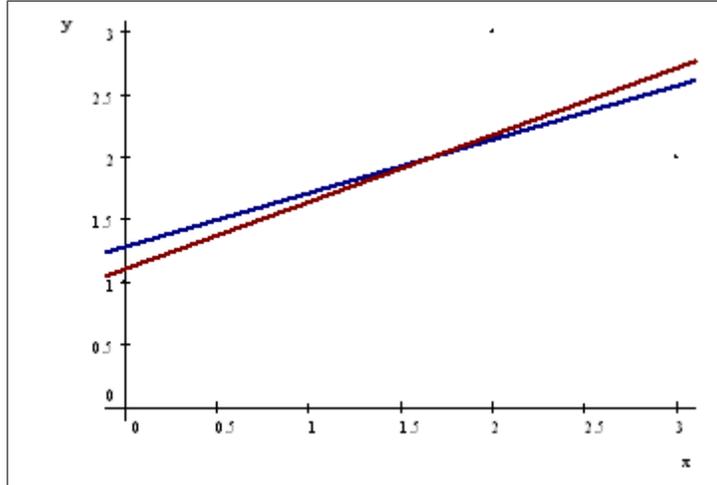
$$L_2 = 1.286 + 0.4286x$$

iii) Grafique y compare $L1$ y $L2$.

Rojo: $L_1 = 1.108 + 0.5352x$

Azul: $L_2 = 1.286 + 0.4286x$

Negro: $(0, 1)$, $(2, 3)$ $(3, 2)$.



$L1$ tiene menor intercepto que $L2$, pero mayor pendiente, además se puede observar que el punto en donde ambas rectas se intercepta corresponde a $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{5}{3}, 2)$. La diferencia entre ambas rectas se basa en el hecho que $L2$ solo concidera el error en el eje y , por lo que su pendiente será la que menor haga la suma de los errores verticales, mientras que $L1$ concidera el error ortogonal, que es el error del eje x y del eje y , por lo que su pendiente será la que haga menor el error del eje x y del eje y . Esta concideración se basa en el hecho de que si el error de los datos es solo del eje x , la recta $L1$ tiene la propiedad que el error $\sum_{i=1}^n |x_i - \hat{x}_i|$, donde \hat{x}_i es tal que $L2(\hat{x}_i) = y_i$ es menor que cualquier otra recta.