



Universidad de Chile

Departamento de Ingeniería Matemática

MA-33A

Capítulo 3:

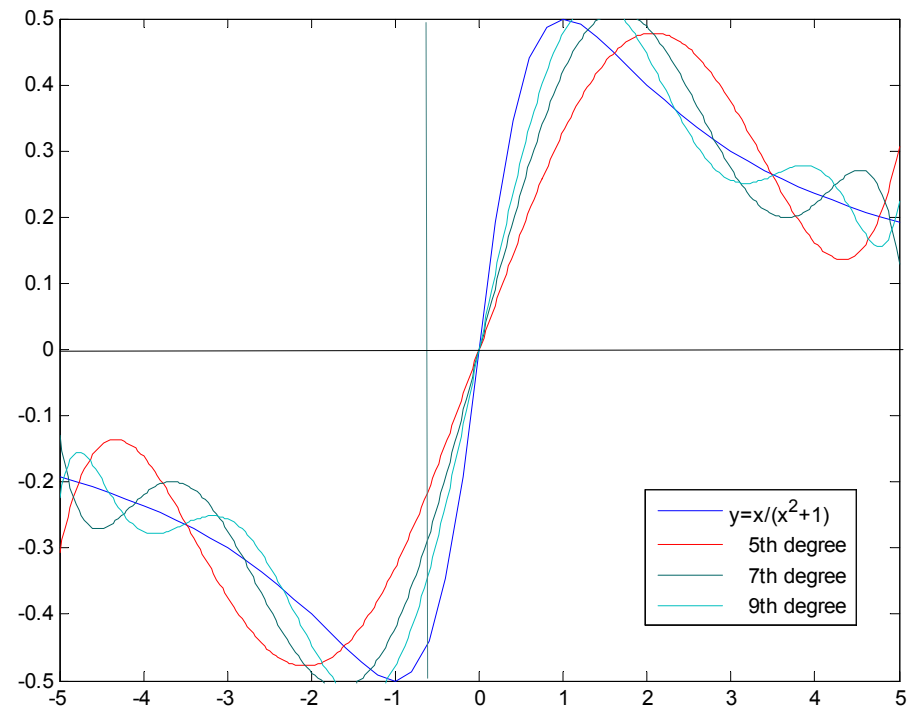
Interpolación y

Aproximación Funciones

Gonzalo Hernández Oliva

GHO

IA - MA-33A



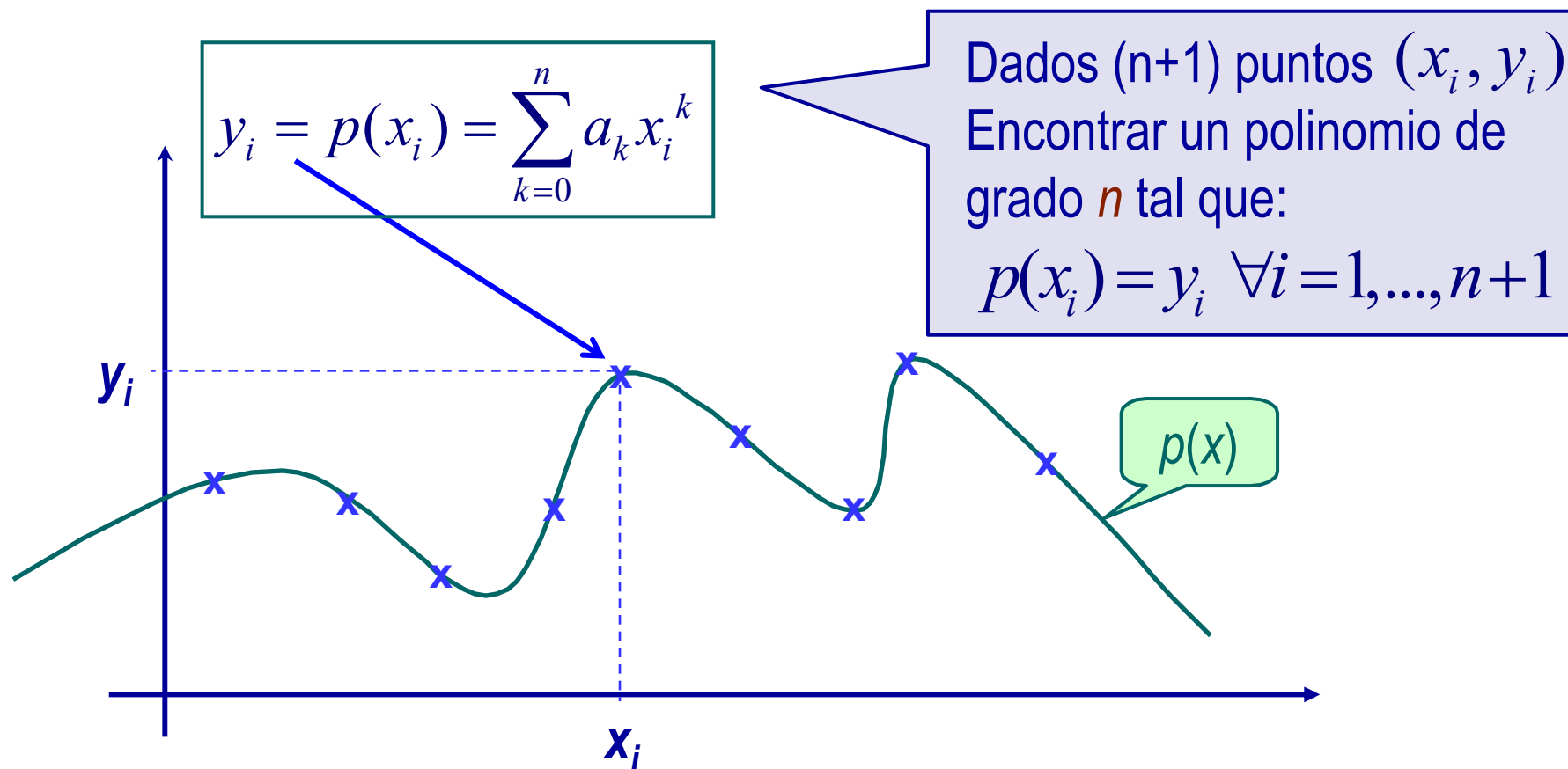
Interpolación y Aproximación de Funciones : Temario



- 1) Motivación
- 2) Interpolación de Lagrange, Newton, Hermite
- 3) Interpolación por Spline Cúbicos
- 4) Aproximación de Taylor
- 5) Aproximación por Mínimos Cuadrados:
Discretos y Continuos
- 6) Interpolación y Aproximación Trigonométrica

Interp. y Aprox. de Funciones:

1) Motivación 1: Interpolación Polinomial



Interp. y Aprox. de Funciones:

1) Motivación 1: Interpolación Polinomial



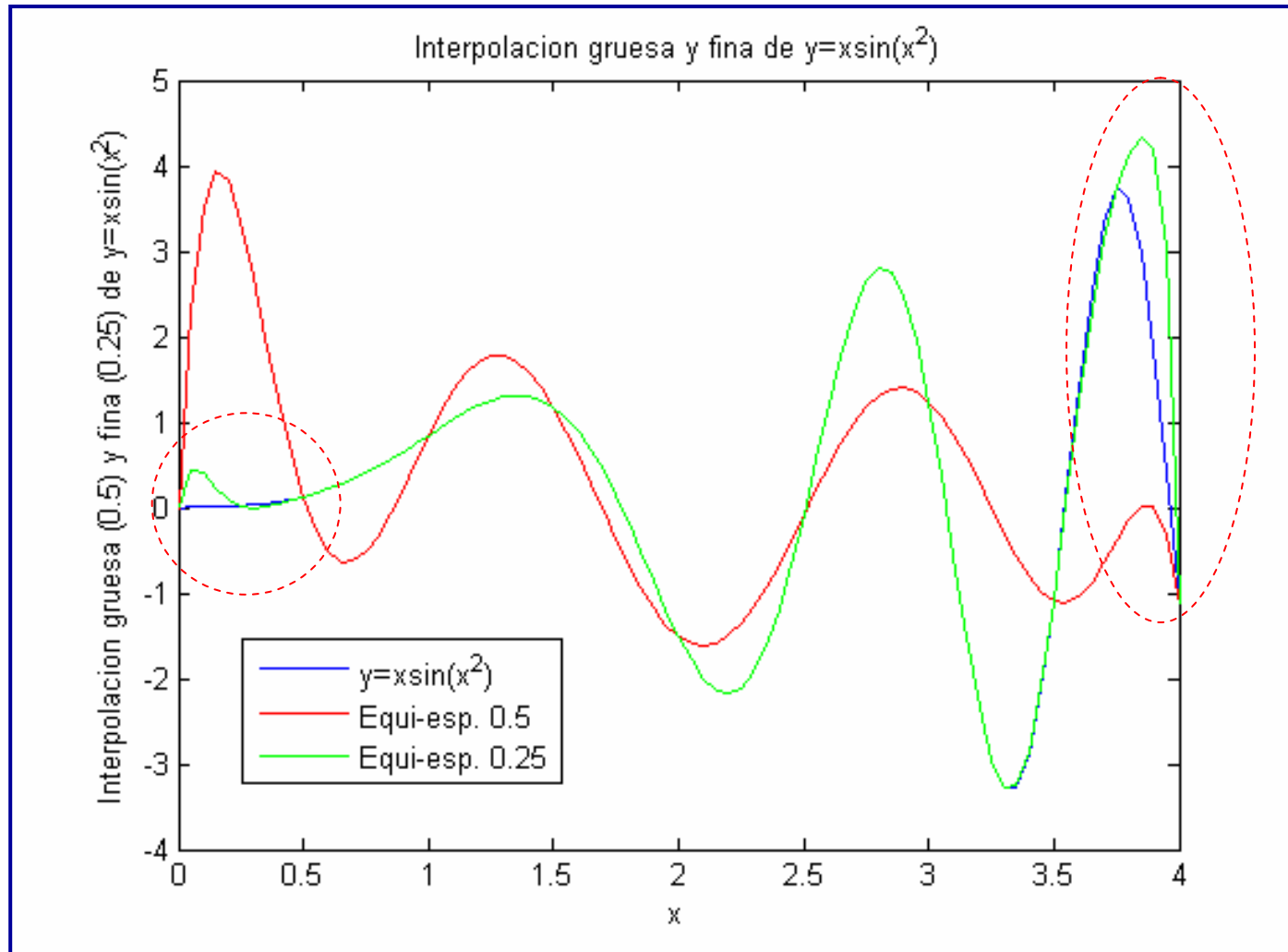
$$y_i = p(x_i) \quad \forall i = 1, \dots, (n+1)$$

$$y_i = p(x_i) = \sum_{k=0}^n a_k x_i^k$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$$

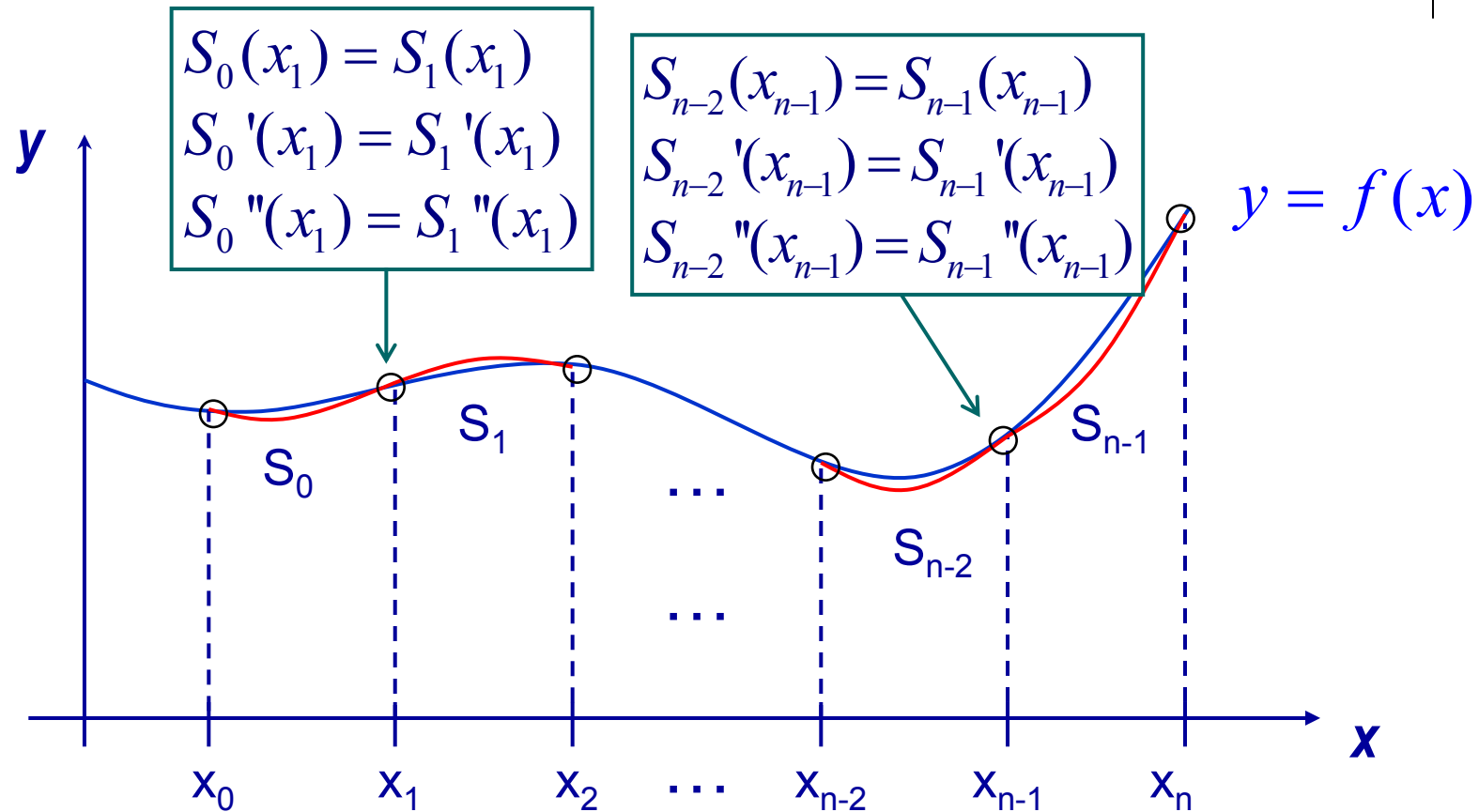
Interp. y Aprox. de Funciones:

1) Motivación 1: Interpolación Polinomial



Interp. y Aprox. de Funciones:

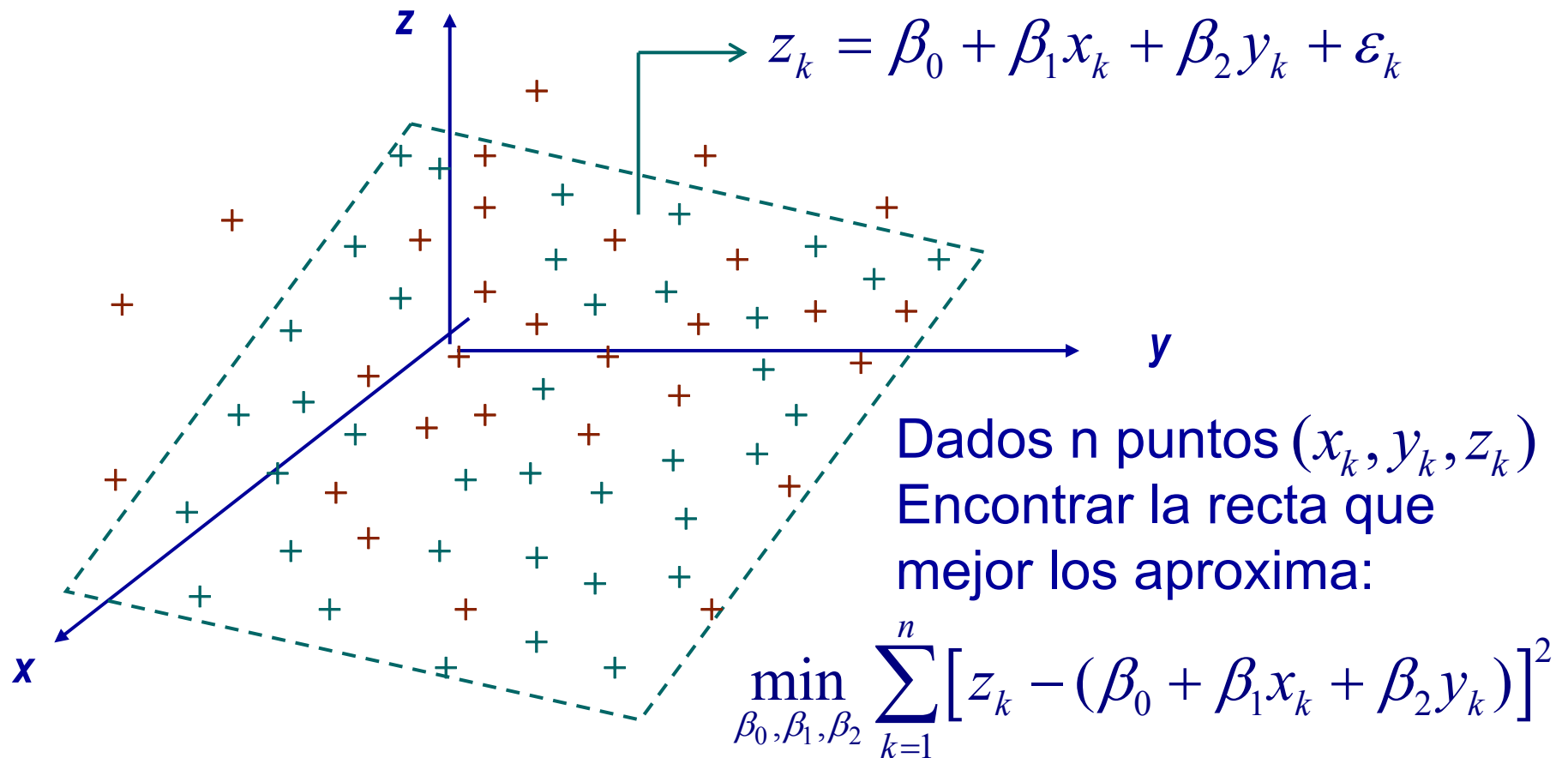
1) Motivación 1: Interpolación por Splines



$$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

1) Mot. 2: Mínimos Cuadrados Discretos



Interp. y Aprox. de Funciones:

1) Mot. 2: Mínimos Cuadrados Discretos

■ Regresión Lineal Bidimensional:

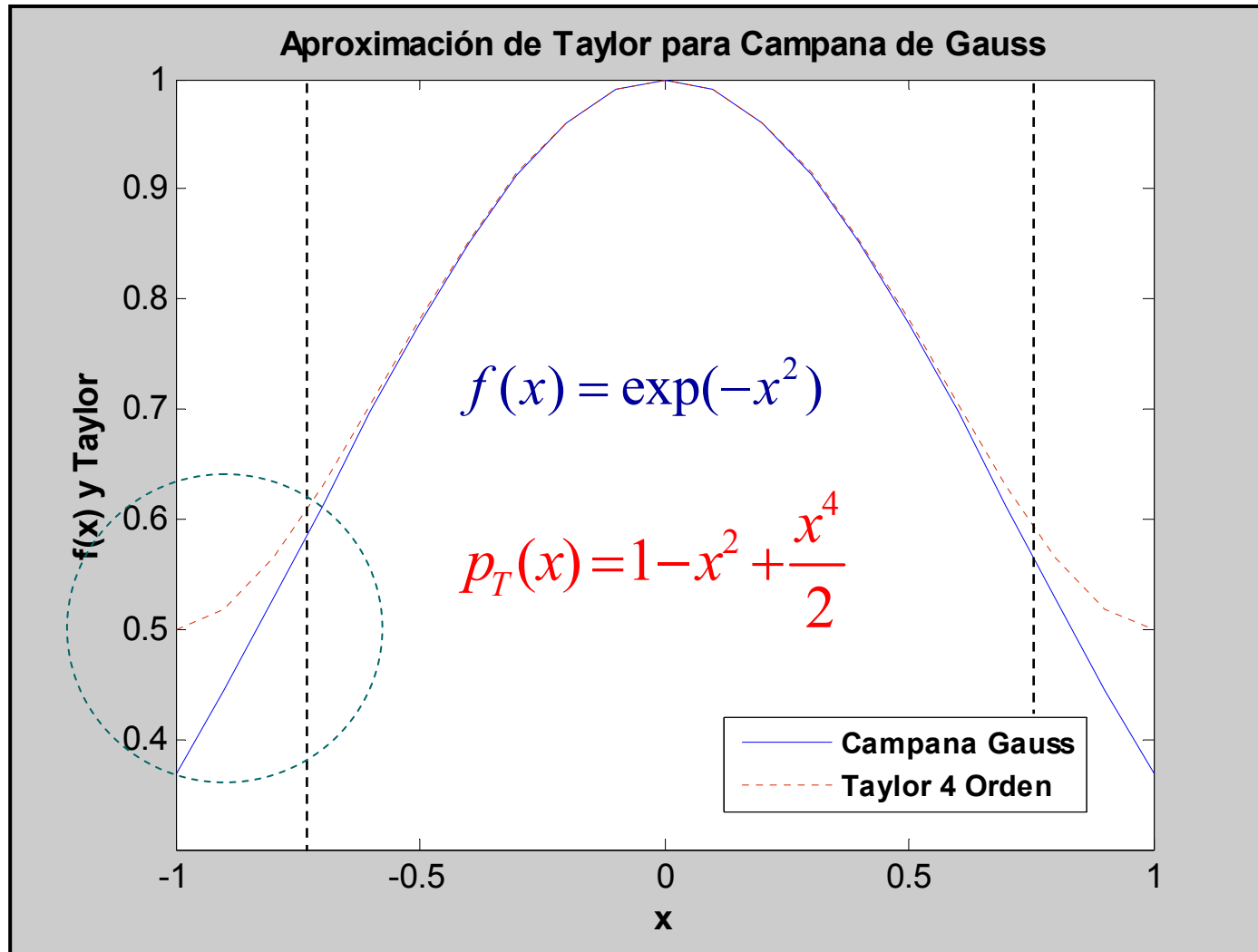
$$\min \varepsilon_T = \sum_{k=1}^n [z_k - (\beta_0 + \beta_1 x_k + \beta_2 y_k)]^2$$

■ Ecuaciones Normales:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n y_k \\ \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ \sum_{k=1}^n y_k & \sum_{k=1}^n x_k y_k & \sum_{k=1}^n y_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n z_k \\ \sum_{k=1}^n x_k z_k \\ \sum_{k=1}^n y_k z_k \end{bmatrix}$$

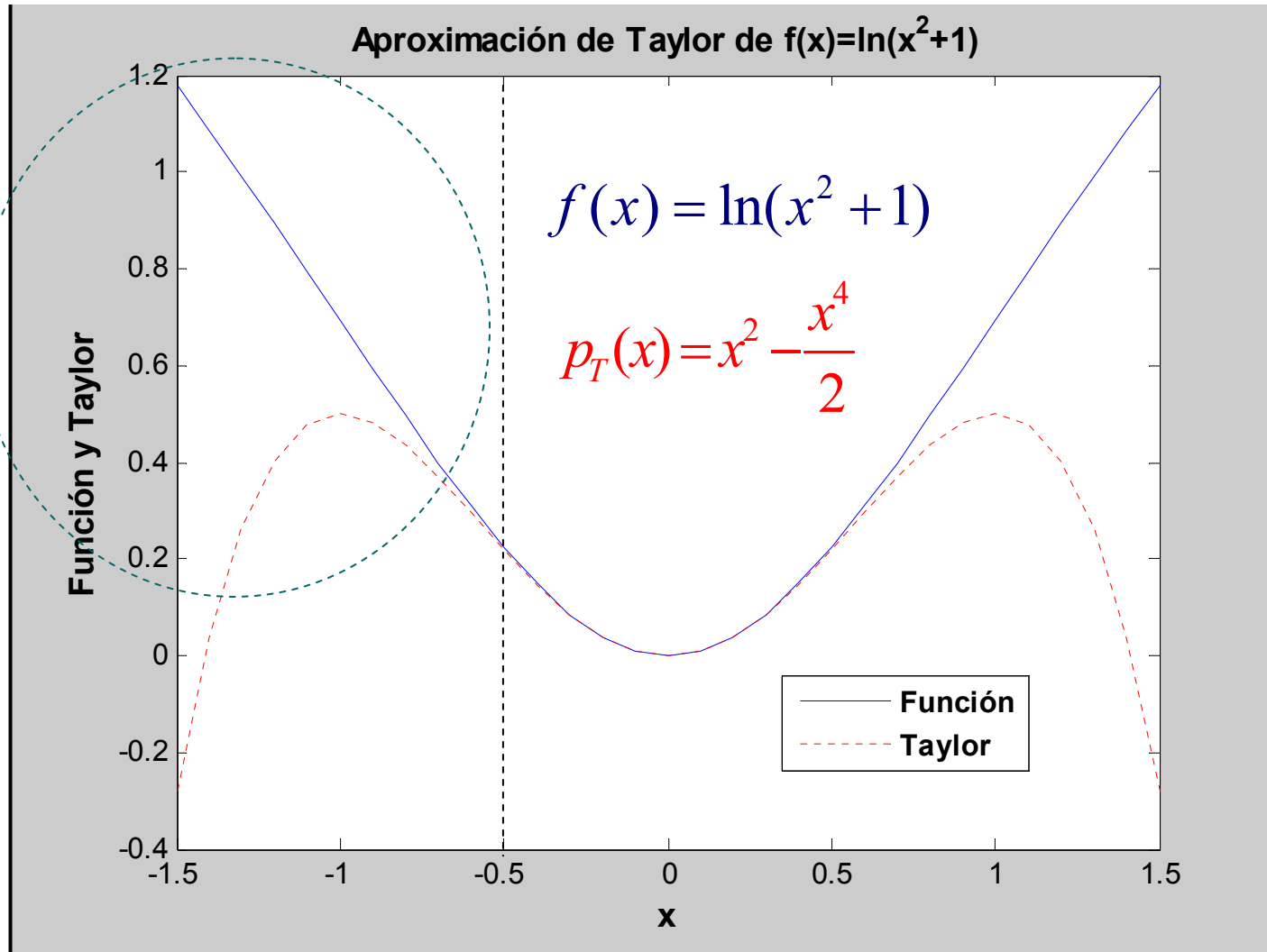
Interp. y Aprox. de Funciones:

1) Motivación 3: Aproximación de Taylor



Interp. y Aprox. de Funciones:

1) Motivación 3: Aproximación de Taylor



Interp. y Aprox. de Funciones:

1) Mot. 4: Mínimos Cuadrados Continuos

- Sea $f \in \zeta[a,b]$. Se quiere determinar un polinomio $p_n(x)$ de grado n según MCC:

$$\min_{p_n(x)} \varepsilon_T = \int_a^b [f(x) - p_n(x)]^2 dx$$

$$\delta_{ij} = \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}$$

Matriz tipo Hilbert !

- Ecuaciones Normales:

$$\begin{bmatrix} \int_a^b x^0 dx & \int_a^b x^1 dx & \int_a^b x^2 dx & \cdots & \int_a^b x^n dx \\ \int_a^b x^1 dx & \int_a^b x^2 dx & \int_a^b x^3 dx & \cdots & \int_a^b x^{n+1} dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b x^n dx & \int_a^b x^{n+1} dx & \int_a^b x^{n+2} dx & \cdots & \int_a^b x^{2n} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b x^0 f(x) dx \\ \int_a^b x^1 f(x) dx \\ \vdots \\ \int_a^b x^n f(x) dx \end{bmatrix}$$

coeficientes

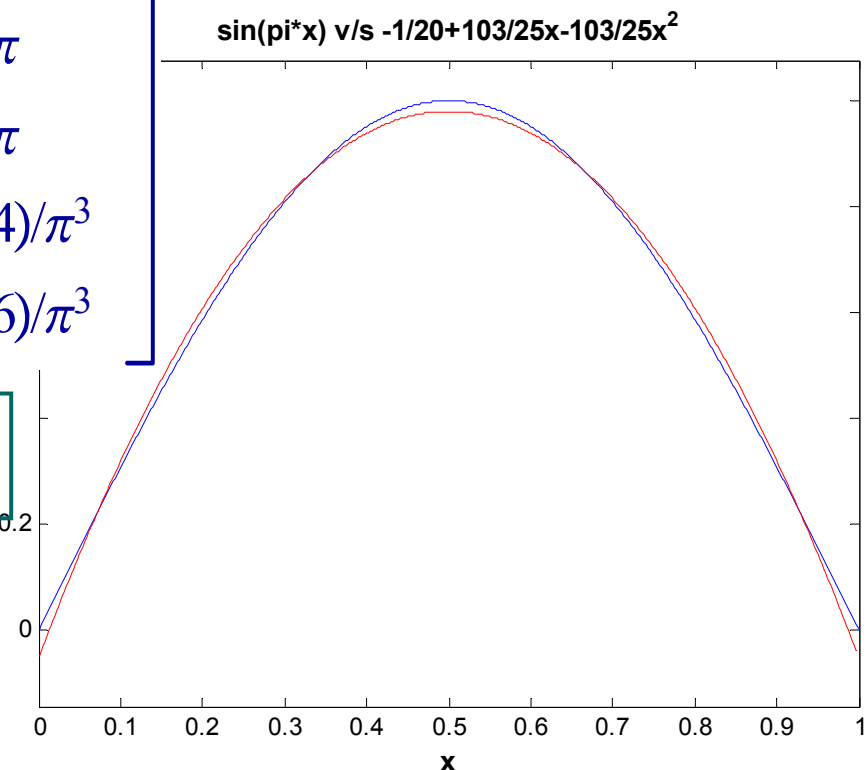
Interp. y Aprox. de Funciones:

1) Mot. 4: Mínimos Cuadrados Continuos

- Sea $f(x) = \sin(\pi x)$. Determinemos $p_3(x)$ polinomio de grado 3 según MC:

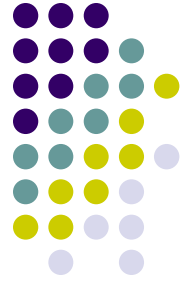
$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\pi \\ 1/\pi \\ (\pi^2 - 4)/\pi^3 \\ (\pi^2 - 6)/\pi^3 \end{bmatrix}$$

$$p_3(x) = -4.12x^2 + 4.12x - 0.05$$



Interp. y Aprox. de Funciones:

2) Interpolación de Lagrange



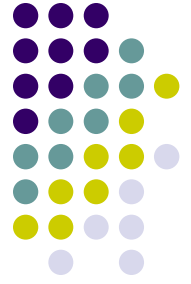
- Teorema: Si x_0, x_1, \dots, x_n son $(n+1)$ puntos distintos y si f es una función que se evalúa en esos puntos $\Rightarrow \exists!$ polinomio de grado a lo más n que interpola f en estos puntos:

$$p_L(x_k) = f(x_k) \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$$

- Donde: $p_L(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_{n,k}(x)$

Interp. y Aprox. de Funciones:

2) Interpolación de Lagrange



- Y a su vez:

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

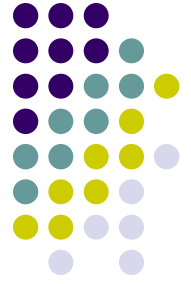
- Es fácil ver que:

$$L_{n,k}(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

- Error de interpolación Lagrange:

Interp. y Aprox. de Funciones:

2) Interpolación de Lagrange



- Teorema: Sean x_0, x_1, \dots, x_n reales distintos en el intervalo $[a, b]$ y $f \in \zeta^{n+1}[a, b]$

Entonces: $\forall x \in [a, b] \exists \xi(x) \in (a, b)$ tal que

$$f(x) = p_L(x) + R_L(x)$$

Error Polinomio
Lagrange

$$R_L(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

2) Interpolación de Lagrange: Ejercs.



- Determinar el polinomio de Lagrange de las siguientes funciones:

$f(x) = \cos(x), x \sin(x), xe^x, \ln(x^2 + 1), (1 + x)^{1/3}$
en los puntos $x = 0, 1, 2, 3, 4$.

Utilice este polinomio para evaluar:

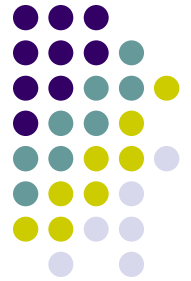
$f(x) = -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, 3.5, 4.5$

Obtenga una cota del error en $[0,5]$.

Determine error absoluto y relativo.

Interp. y Aprox. de Funciones:

2) Interpolación de Lagrange: Ejercs.



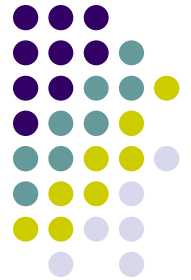
- Para la función de error estadístico erf:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

- 1) Determine el pol. de Taylor de orden 4.
- 2) Determine el pol. de Lagrange en $x=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$, utilizando 1).
- 3) Determine cotas del error de estas aproximaciones.

Interp. y Aprox. de Funciones:

2) Interpolación de Hermite



- El polinomio osculante satisface:

Dados:

x_0, x_1, \dots, x_n ($n+1$) reales distintos en $[a, b]$

m_0, m_1, \dots, m_n (enteros no negativos)

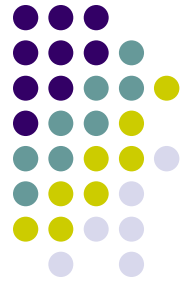
Si $f \in \zeta^m[a, b]$ $\left(m = \max_{0 \leq i \leq n} m_i \right)$

$p(x)$ es el polinomio de menor grado tal que:

$$\frac{d^k p}{dx^k}(x_i) = \frac{d^k f}{dx^k}(x_i) \quad \forall k = 0, \dots, m_i \quad \forall i = 0, \dots, n$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

2) Interpolación de Hermite

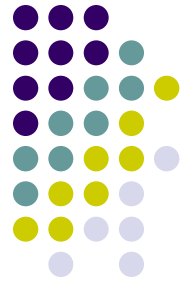


■ Observación:

- 1) Si $n = 0$ el polinomio osculante es el polinomio de Taylor
- 2) Si $m_i = 0 \ \forall i=0, \dots, n$, el polinomio osculante es el polinomio de Lagrange.
- 3) Si $m_i = 1 \ \forall i=0, \dots, n$, el polinomio osculante es el polinomio de Hermite.

Interp. y Aprox. de Funciones:

2) Interpolación de Hermite



- Teorema: Si $f \in \zeta^m[a, b]$ y x_0, x_1, \dots, x_n son $(n+1)$ reales distintos en $[a, b]$, el único polinomio de grado a lo más $(2n+1)$ que interpola $f(x)$ y $f'(x)$ en los puntos x_i es el polinomio de Hermite $H_{2n+1}(x)$ definido por:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^n f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x)$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

2) Interpolación de Hermite



- Donde:

$$H_{nj}(x) = \left(1 - 2(x - x_j)L'_{n,j}(x)\right)L_{n,j}^2(x)$$

$$\hat{H}_{nj}(x) = (x - x_j)L_{n,j}^2(x)$$

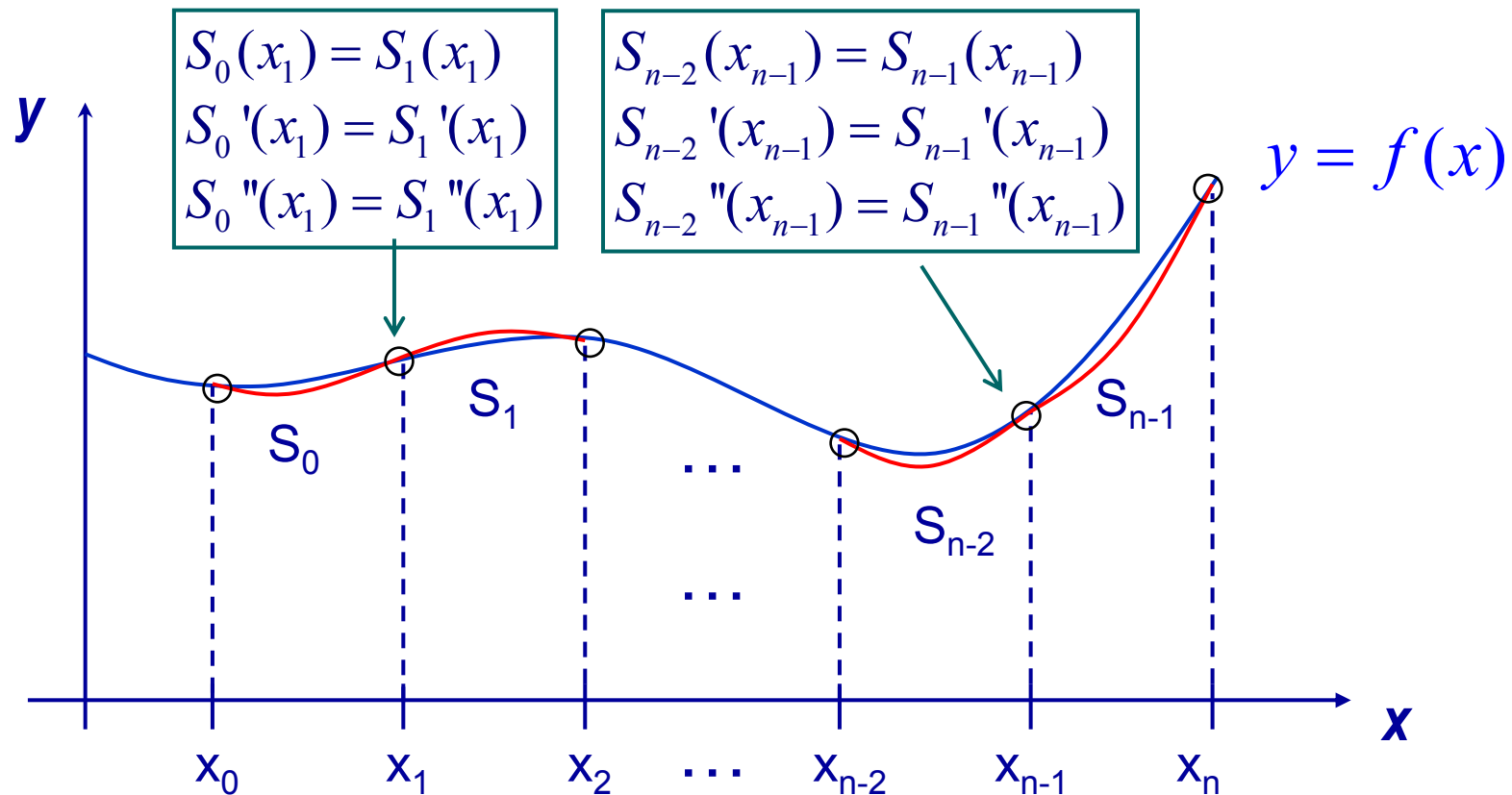
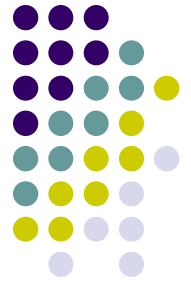
$L_{n,j}$: j-ésimo pol. de Lagrange de grado n.

- Si: $f \in \zeta^{2n+2}[a,b] \Rightarrow \forall x \in [a,b] \exists \xi(x) \in (a,b)$:

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{(x - x_0)^2(x - x_1)^2 \dots (x - x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi(x))$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación por Splines Cúbicos



$$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación por Splines Cúbicos



- Dada una función f definida en $[a,b]$ y $(n+1)$ puntos $x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b$, el spline cúbico S de f satisface las siguientes condiciones :
- a) $S(x)$ es un polinomio cúbico en el subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ denotado por $S_j(x)$ para $j=0,1,\dots,(n-1)$

$$\begin{array}{ll} S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3 & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3 & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1} + b_{n-1}(x - x_{n-1}) + c_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x - x_{n-1})^3 & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{array}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación por Splines Cúbicos



- b) $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}) \quad \forall j=0,1,\dots,(n-2)$: Continuidad
- c) $S(x_j) = S_j(x_j) = f(x_j) \quad \forall j=0,1,\dots,n$: Interpolación
- d) $S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1}) \quad \forall j=0,1,\dots,(n-2)$: Continuidad primera derivada
- e) $S''_j(x_{j+1}) = S''_{j+1}(x_{j+1}) \quad \forall j=0,1,\dots,(n-2)$: Continuidad segunda derivada
- f) Condición de frontera:
 - i) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (Frontera libre o natural)
 - ii) $S'(x_0) = f'(x_0) \quad S'(x_n) = f'(x_n)$ (Frontera sujeta)

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación por Splines Cúbicos



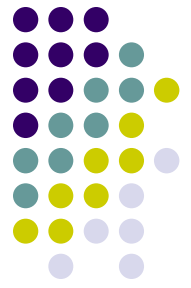
- Para construir un spline cúbico de f se tiene que $\forall j = 0, 1, \dots, (n-1)$:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

- Aplicando la condición c) $\forall j = 0, 1, \dots, (n-1)$:

$$S_j(x_j) = a_j = f(x_j) \quad \forall j = 0, 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned} a_{j+1} &= S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) = \\ &= a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3 \end{aligned}$$



Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación por Splines Cúbicos

- Definimos: $h_j = x_{j+1} - x_j \quad \forall j = 0, 1, \dots, n-1$
- Luego: $a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3$ ①
- Se define $b_n = S'(x_n)$ y $b_j = S'(x_j) \quad \forall j = 0, 1, \dots, n-1$
Aplicando la condición d) $\forall j = 0, 1, \dots, n-1$:
 $b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2$ ②
- Se define $c_n = S''(x_n)/2$ y aplicando la cond. e):
 $c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j \quad \forall j = 0, 1, \dots, n-1$ ③

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación por Splines Cúbicos



- Despejando d_j de ③ y sustituyendo en ① y ② se obtienen las ecuaciones:

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3} (2c_j + c_{j+1}) \quad \forall j = 0, 1, \dots, n-1 \quad ④$$

$$b_{j+1} = b_j + h_j (c_j + c_{j+1}) \quad \forall j = 0, 1, \dots, n-1 \quad ⑤$$

- Despejando b_j en ④: (También b_{j-1})

$$b_j = \frac{1}{h_j} (a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3} (2c_j + c_{j+1}) \quad \forall j = 0, 1, \dots, n-1 \quad ⑥$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación por Splines Cúbicos



- Se obtiene el siguiente SEL $\forall j=1, \dots, n-1$:

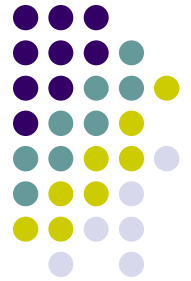
7

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_jc_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1})$$

- A estas ecuaciones se debe adicionar las condiciones de frontera: Libre o Sujeta
- Este sist. de ecs. tiene variables: c_0, c_1, \dots, c_n
- ¿Tiene solución única 7 ?

Interp. y Aprox. de Funciones:

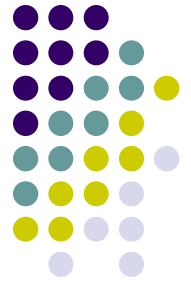
3) Interpolación Spline Cúbico Libre



- Teo: Si se define f en $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, entonces f tendrá un único spline cúbico natural (libre) que cumple con las condiciones de frontera $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$.
- La forma matricial de 7 es ...
- Ejercicio: Determinar el spline cúbico libre de $f(x) = \sin(\pi x)$ en los puntos: $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación Spline Cúbico Libre



- Forma matricial Spline libre 7:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación Spline Cúbico Libre



- Forma matricial Spline libre **7**:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Vector Lado Derecho}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}}_{\text{Incógnitas}}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interp. Spline Cúbico Libre: Ejemplo



- Dados los puntos equiespaciados:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$$

$$y_0 = \sin(0) = 0, y_1 = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y_3 = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_4 = \sin(\pi) = 0$$

- Se deben calcular primero:

$$h_0 = h_1 = h_2 = h_3 = \frac{1}{4} \quad a_0 = 0, a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_2 = 1, a_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{3(a_1 - a_0)}{h_0} \\ \frac{3(a_3 - a_2)}{h_2} - \frac{3(a_2 - a_1)}{h_1} \\ \frac{3(a_4 - a_3)}{h_3} - \frac{3(a_3 - a_2)}{h_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interp. Spline Cúbico Libre: Ejemplo



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4.9706 \\ -7.0294 \\ -4.9706 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.6723 \\ -5.1933 \\ -3.6723 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1344 \\ 2.2164 \\ 0 \\ -2.2164 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.8963 \\ -2.0281 \\ 2.0281 \\ 4.8963 \end{bmatrix}$$

$$b_k = (a_{k+1} - a_k) \frac{1}{h_k} - (c_{k+1} + 2c_k) \frac{h_k}{3} \quad \forall k = 0, \dots, n-1$$

$$d_k = \frac{1}{3h_k} (c_{k+1} - c_k) \quad \forall k = 0, \dots, n-1$$

6

3

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación Spline Cúbico Sujeto



- Teo: Si se define f en $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, entonces f tendrá un único spline cúbico sujeto que cumple con las condiciones de frontera $S'(x_0) = f'(x_0)$, $S'(x_n) = f'(x_n)$.
- La forma matricial de 7 es ...
- Ejercicio: Determinar el spline cúbico sujeto de $f(x) = \cos(\pi x)$ en los puntos: $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación Spline Cúbico Sujeto



- Forma matricial Spline sujeto **7** :

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación Spline Cúbico Sujeto



■ Forma matricial Spline Sujeto 7:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(x_0) \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 3f'(x_n) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{bmatrix}}_{\text{Vector Lado Derecho}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}}_{\text{Incógnitas}}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación Spline Cúbico Sujeto



Sea $f \in C^4[a, b]$ con $\max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| = M$. Si S es la spline sujeta determinada en los puntos $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, entonces:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - S(x)| \leq \frac{5M}{384} \max_{0 \leq j \leq (n-1)} (x_{j+1} - x_j)^4$$

Cota del Error
SC Sujeta

Sea $g \in C^2[a, b]$ cualquier función que satisfice las condiciones de interpolación sujetas en:
 $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ para una función f :

$$\begin{aligned} g(x_k) &= f(x_k) \quad \forall k = 0, 1, \dots, n \\ g'(x_0) &= f'(x_0), g'(x_n) = f'(x_n) \end{aligned}$$

Entonces, si S es la spline sujeta determinada en esos mismos puntos:

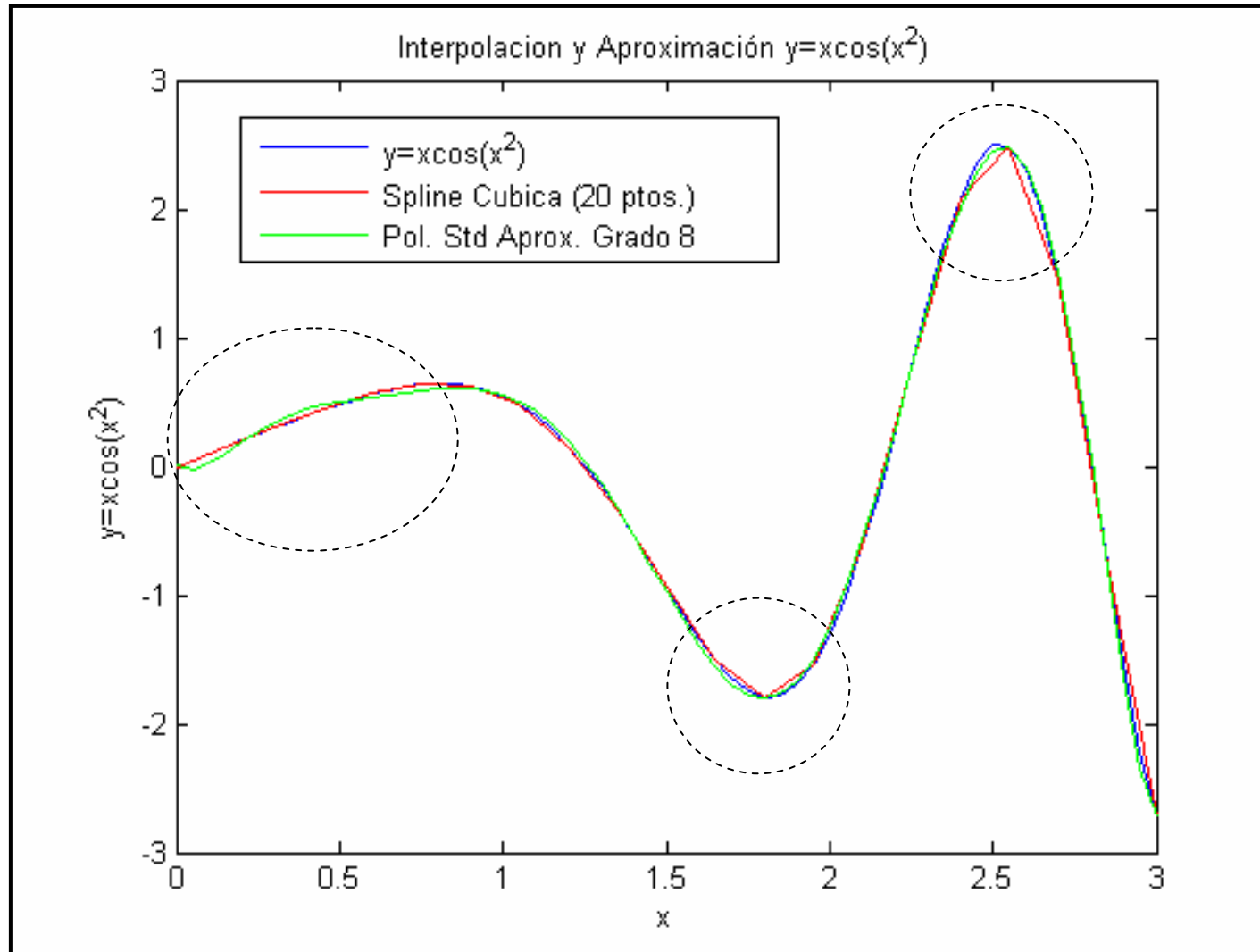
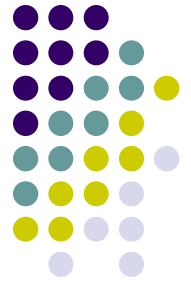
$$\int_a^b |S(x)|^2 dx \leq \int_a^b |g(x)|^2 dx$$

Mínima Oscilación
SC Sujeta

La spline sujeta S es la que oscila menos de todas las funciones "suaves" que interpolan a f

Interp. y Aprox. de Funciones:

4) Interpolación v/s Aproximación:



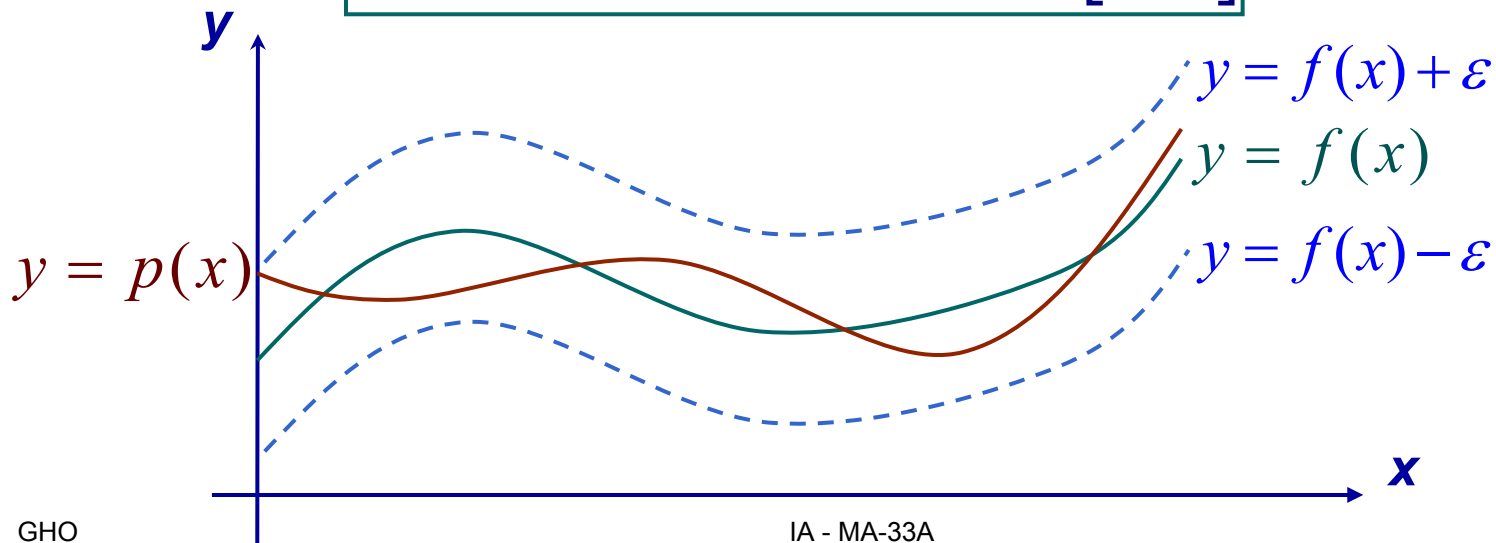
Interp. y Aprox. de Funciones:

4) Resultado Teórico Básico



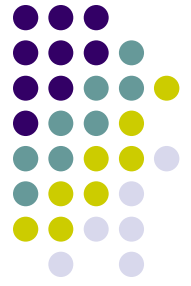
- Teorema de Aproximación de Weierstrass: Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua:
 $(\forall \varepsilon > 0) (\exists p(x))$ polinomio tal que:

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$$



Interp. y Aprox. de Funciones:

4) Polinomio Taylor:



- Teorema de Taylor: Suponga que:

$$f \in \mathbb{C}^n[a, b], f^{(n+1)} \text{ existe en } [a, b], x_0 \in [a, b]$$

Para cada $x \in [a, b] \exists \xi(x)$ entre x y x_0 tal que:

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

4) Polinomio Taylor: Ejemplo 1



x	$1 + x$	$1 + x + \frac{x^2}{2}$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$	e^x
1	2	2.5	2.666666	2.7083333	2.718281828
0.5	1.5	1.625	1.645833	1.6484375	1.6487212707
0.3	1.3	1.345	1.3495	1.3498375	1.34985880757
0.1	1.1	1.105	1.10516667	1.10517083	1.10517091807
0.01	1.01	1.01005	1.01005017	1.01005017	1.010050167
0.001	1.001	1.0010005	1.00100050000	1.00100050017	1.00100050016

Interp. y Aprox. de Funciones:

4) Polinomio Taylor: Ejemplo 2



- Determine el polinomio de Taylor de quinto orden para la función:

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

en torno a $x_0 = 0$

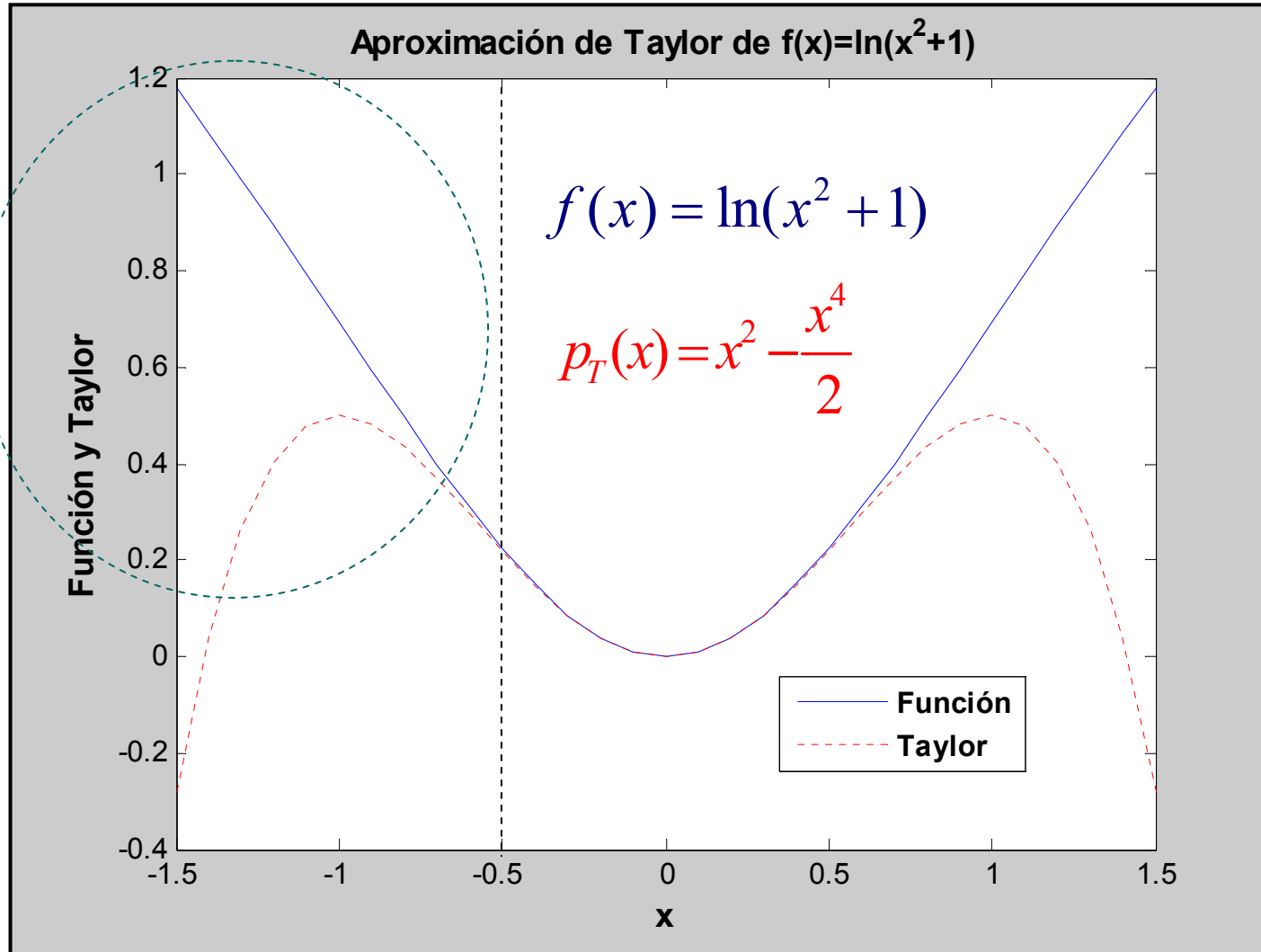
- Utilice estos polinomios que aproximan a f para calcular:

$$f(0.5), p_5(0.5) \text{ y } f(1.0), p_5(1.0)$$

- Cual es el error relativo ?

Interp. y Aprox. de Funciones:

4) Polinomio Taylor: Ejemplo 2



Interp. y Aprox. de Funciones:

4) Polinomio de Taylor: Ejercicios



- Ejemplos Polinomio de Taylor de f en torno a $x_0=0$:

$$f(x) = \sin(x), \cos(x), \sin(x^2), x \sin(x^2)$$

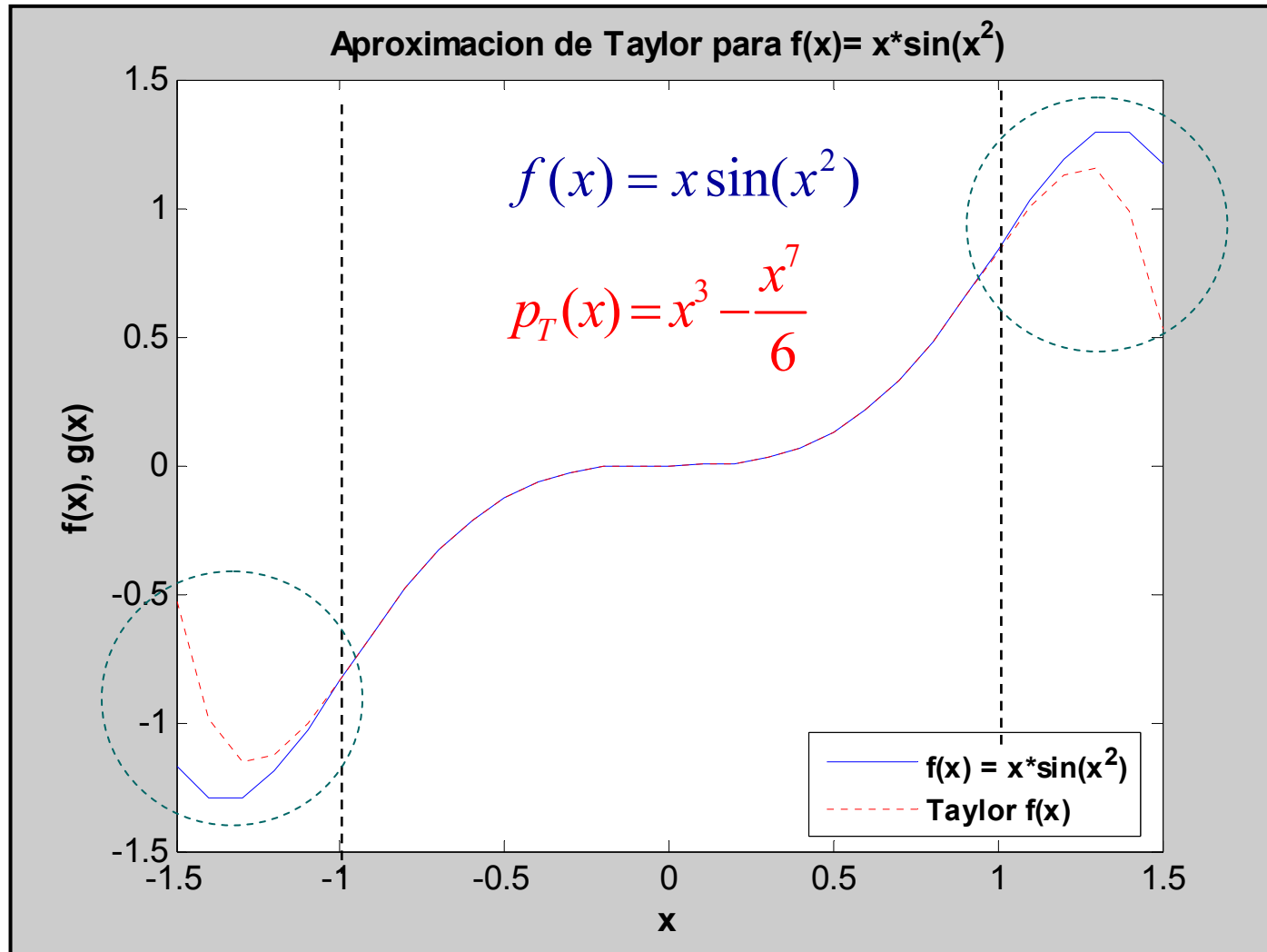
$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$f(x) = \ln(x^2 + 1), x \ln(x^2 + 1)$$

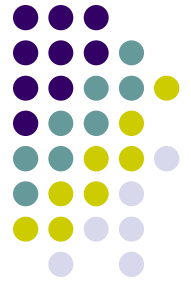
$$\text{Si } f(x) = \frac{1}{(1+x)^m} \Rightarrow p_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m+k-1}{k} x^k$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

4) Polinomio de Taylor: Ejercicios



Interp. y Aprox. de Funciones:



4) Polinomio de Taylor:

- El polinomio de Taylor no entrega una buena aproximación de una función en un intervalo.
- Si se quiere aproximar una función en un intervalo, se puede utilizar:
 - 1) Interpolación o aproximación polinomial (Standard, Legendre, Chebyshev, etc)
 - 2) Interpolación Aproximación Trigonométrica
 - 3) Técnicas recientes

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Método MC Discreto



■ Regresión Cuadrática y Cúbica:

$$\min \varepsilon_T = \sum_{k=1}^n [y_k - (\beta_0 + \beta_1 x_k + \beta_2 x_k^2)]^2$$

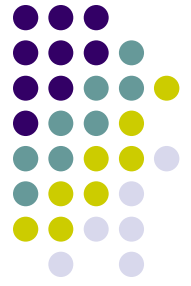
$$\min \varepsilon_T = \sum_{k=1}^n [y_k - (\beta_0 + \beta_1 x_k + \beta_2 x_k^2 + \beta_3 x_k^3)]^2$$

■ Ecuaciones Normales: Sol. única para $x_i \neq s$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k^3 \\ \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k^3 & \sum_{k=1}^n x_k^4 \\ \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k^3 & \sum_{k=1}^n x_k^4 & \sum_{k=1}^n x_k^5 \\ \sum_{k=1}^n x_k^3 & \sum_{k=1}^n x_k^4 & \sum_{k=1}^n x_k^5 & \sum_{k=1}^n x_k^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n y_k \\ \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ \sum_{k=1}^n x_k^2 y_k \\ \sum_{k=1}^n x_k^3 y_k \end{bmatrix}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Método MC Discreto



■ Regresión Polinomial: ($n < m-1$)

$$\min \varepsilon_T = \sum_{i=1}^m [y_i - p_n(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^m \left[y_i - \sum_{k=0}^n a_k x_i^k \right]^2$$

■ Ecuaciones Normales: Sol. única para $x_i \neq s$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^n \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i^3 & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m x_i^n & \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} & \sum_{i=1}^m x_i^{n+2} & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m x_i^n y_i \end{bmatrix}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Standard MC Continuo



- Sea $f \in \zeta[a, b]$. Se quiere determinar un polinomio $p_n(x)$ de grado n según MC:

$$\min_{p_n(x)} \varepsilon_T = \int_a^b [f(x) - p_n(x)]^2 dx$$

Matriz tipo Hilbert !

$$\delta_{ij} = \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}$$

$i, j=0, \dots, n$

coeficientes

- Ecuaciones Normales:

$$\begin{bmatrix} \int_a^b x^0 dx & \int_a^b x^1 dx & \int_a^b x^2 dx & \cdots & \int_a^b x^n dx \\ \int_a^b x^1 dx & \int_a^b x^2 dx & \int_a^b x^3 dx & \cdots & \int_a^b x^{n+1} dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b x^n dx & \int_a^b x^{n+1} dx & \int_a^b x^{n+2} dx & \cdots & \int_a^b x^{2n} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b x^0 f(x) dx \\ \int_a^b x^1 f(x) dx \\ \vdots \\ \int_a^b x^n f(x) dx \end{bmatrix}$$



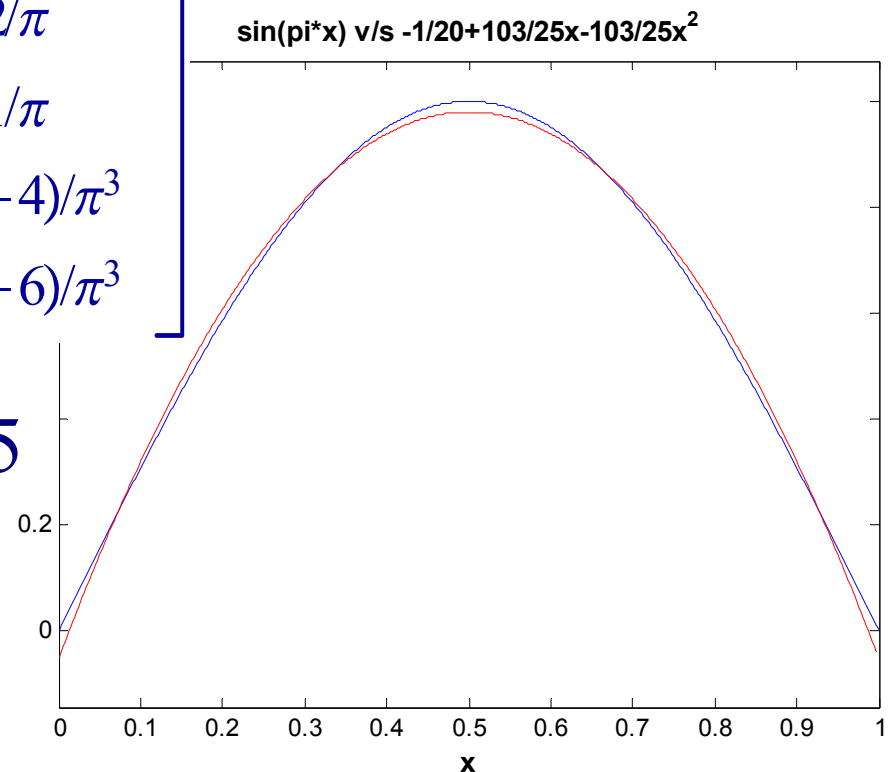
Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aprox. Standard MC Continuo: Ejemplo

- Sea $f(x) = \sin(\pi x)$. Determinemos $p_3(x)$ polinomio de grado 3 según MC std. en $[0,1]$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\pi \\ 1/\pi \\ (\pi^2 - 4)/\pi^3 \\ (\pi^2 - 6)/\pi^3 \end{bmatrix}$$

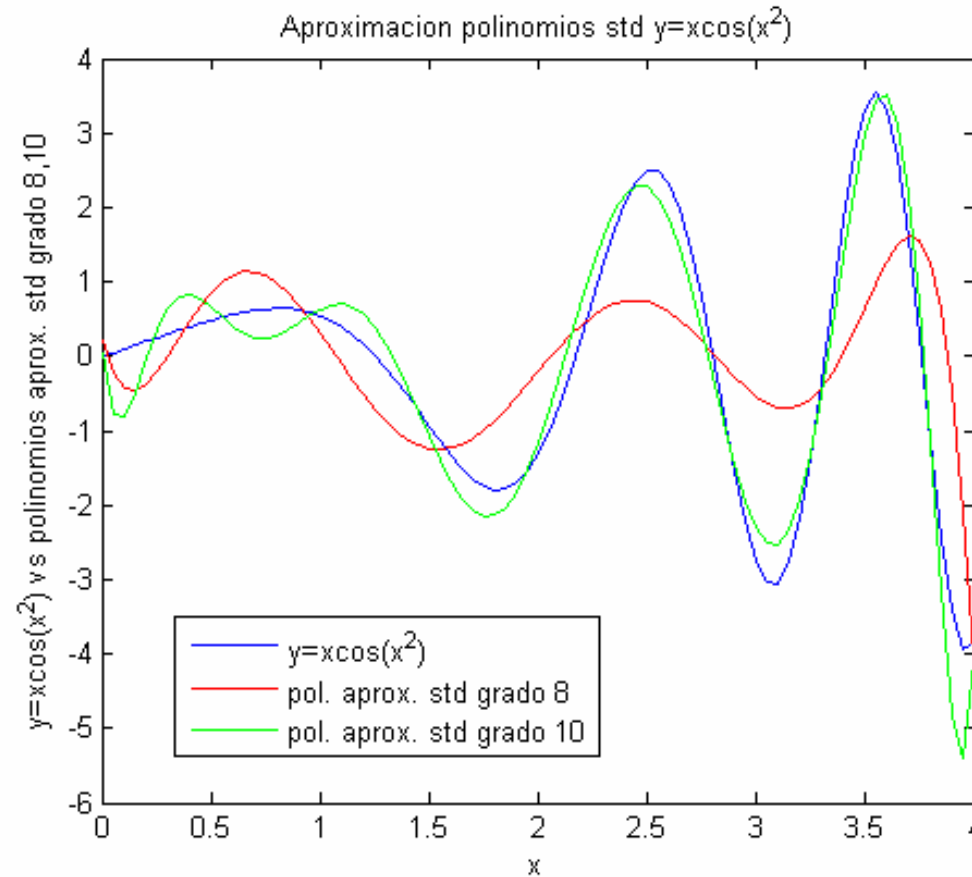
$$p_3(x) = -4.12x^2 + 4.12x - 0.05$$



Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aprox. Standard MC Continuo: Ejemplo

- Sea $f(x) = x \cos(x^2)$. Polinomios de grado $p_{8,10}(x)$ 8,10 MC standard en $[0,4]$:



Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Método MC Continuo



- El conjunto de funciones $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ es linealmente independiente en $[a, b]$ si:

$$c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

- Implica que: $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$
- Si ϕ_j es un polinomio de grado $j \quad \forall j=0, \dots, n$
 $\Rightarrow \{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ es un conjunto linealmente independiente para cualquier intervalo $[a, b]$.

Interp. y Aprox. de Funciones:

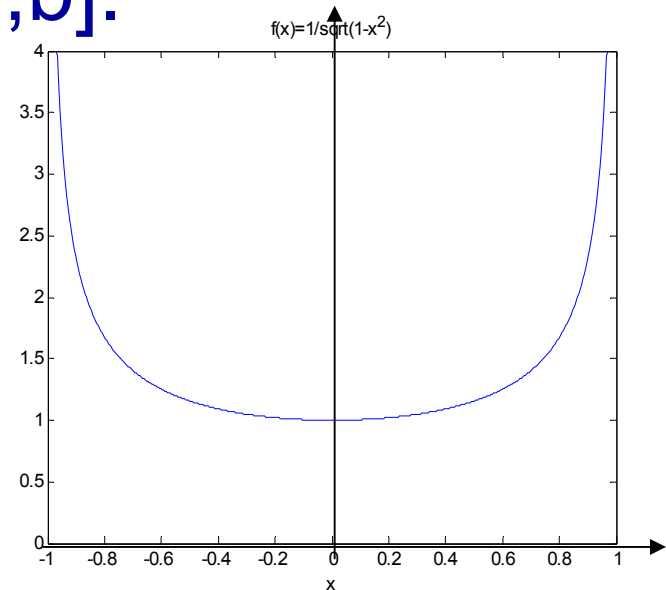
5) Aproximación Método MC Continuo



- Una función $\omega(x)$ es una función de peso en $[a,b]$ si $\omega(x) \geq 0$ para $x \in [a,b]$ y $\omega(x) \neq 0$ en cualquier subintervalo de $[a,b]$.

- Por ejemplo:

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



- Sean $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ $(n+1)$ funciones l.i en $[a,b]$.

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Método MC Continuo



- Sea $f \in \zeta[a, b]$. Se quiere determinar una función $p(x)$ de la forma:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x)$$

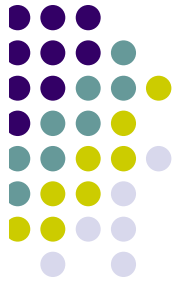
ϕ_0, \dots, ϕ_n
funciones l.i.

- que aproxime $f(x)$ según el criterio de MC para el peso $\omega(x)$:

$$\min_{a_0, \dots, a_n} \varepsilon_T = \int_a^b \omega(x) [f(x) - p(x)]^2 dx$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Método MC Continuo



$$\min_{a_0, \dots, a_n} \mathcal{E}_T = \int_a^b \omega(x) \left[f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x) \right]^2 dx$$

$$\begin{bmatrix} \int_a^b (\omega \phi_0^2)(x) dx & \int_a^b (\omega \phi_0 \phi_1)(x) dx & \cdots & \int_a^b (\omega \phi_0 \phi_n)(x) dx \\ \int_a^b (\omega \phi_1 \phi_0)(x) dx & \int_a^b (\omega \phi_1^2)(x) dx & \cdots & \int_a^b (\omega \phi_1 \phi_n)(x) dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b (\omega \phi_n \phi_0)(x) dx & \int_a^b (\omega \phi_n \phi_1)(x) dx & \cdots & \int_a^b (\omega \phi_n^2)(x) dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b (\omega f \phi_0)(x) dx \\ \int_a^b (\omega f \phi_1)(x) dx \\ \vdots \\ \int_a^b (\omega f \phi_n)(x) dx \end{bmatrix}$$

- Si las funciones $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ son ortogonales con respecto a $\omega(x)$ en $[a, b]$ se tiene que:

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Método MC Continuo



$$\int_a^b (\omega \phi_j \phi_k)(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ \alpha_j & \text{si } j = k \end{cases}$$

$$\alpha_j = \int_a^b (\omega \phi_j^2)(x) dx > 0$$

- En este caso, las ecuaciones normales quedan diagonales:

$$\begin{bmatrix} \int_a^b (\omega \phi_0^2)(x) dx & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \int_a^b (\omega \phi_1^2)(x) dx & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \int_a^b (\omega \phi_n^2)(x) dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b (\omega f \phi_0)(x) dx \\ \int_a^b (\omega f \phi_1)(x) dx \\ \vdots \\ \int_a^b (\omega f \phi_n)(x) dx \end{bmatrix}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Método MC Continuo



- Teo: El conjunto de polinomios $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ definidos recursivamente es ortogonal en $[a, b]$ con respecto a la función de peso $\omega(x)$: **(cualquiera)**

$$\phi_0(x) = 1 \quad \phi_1(x) = x - B_1$$

$$\phi_k(x) = (x - B_k)\phi_{k-1}(x) - C_k\phi_{k-2}(x) \quad \forall k \geq 2$$

$$B_k = \frac{\int_a^b x\omega(x)[\phi_{k-1}(x)]^2 dx}{\int_a^b \omega(x)[\phi_{k-1}(x)]^2 dx} \quad C_k = \frac{\int_a^b x\omega(x)\phi_{k-2}(x)\phi_{k-1}(x)dx}{\int_a^b \omega(x)[\phi_{k-2}(x)]^2 dx}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Polinomios de Legendre

- Teo: El conjunto de polinomios $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ de Legendre definidos recursivamente es ortogonal en $[-1, 1]$ c/r a la f. de peso $\omega(x)=1$:

$$\phi_0(x) = 1 \quad \phi_1(x) = x - B_1$$

$$\phi_k(x) = (x - B_k)\phi_{k-1}(x) - C_k\phi_{k-2}(x) \quad \forall k \geq 2$$

$$B_k = \frac{\int_{-1}^1 x [\phi_{k-1}(x)]^2 dx}{\int_{-1}^1 [\phi_{k-1}(x)]^2 dx} \quad C_k = \frac{\int_{-1}^1 x \phi_{k-2}(x) \phi_{k-1}(x) dx}{\int_{-1}^1 [\phi_{k-2}(x)]^2 dx}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Polinomios de Legendre

■ Polinomios de Legendre $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$

$$\phi_0(x) = 1$$

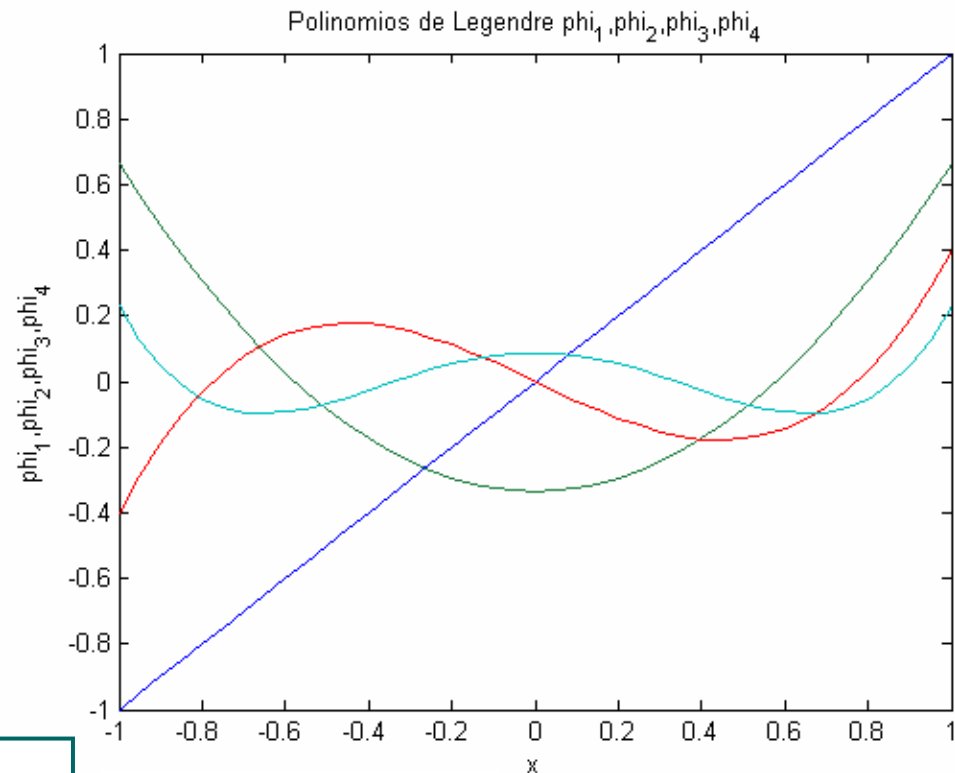
$$\phi_1(x) = x$$

$$\phi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\phi_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

$$\phi_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$$

$$\phi_k(x) = \frac{d^k}{dx^k} \left[(x^2 - 1)^k \right]$$



Fórmula
De Rodrigues

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Polinomios de Legendre

- Teo: El conjunto de polinomios $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ de Legendre definidos recursivamente es ortogonal en $[-1, 1]$ c/r a la f. de peso $\omega(x)=1$:

↓
Gram
Schmidt

$$\psi_0(x) = 1 \quad \psi_1(x) = x$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad \psi_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$\psi_{k+1}(x) = \left(\frac{2k+1}{k+1}\right)x\psi_k(x) - \left(\frac{k}{k+1}\right)\psi_{k-1}(x) \quad \forall k \geq 2$$

$$\psi_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} \left[(x^2 - 1)^k \right]$$

Fórmula
De Rodrigues

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Polinomios de Chebyshev

- Teo: El conjunto de polinomios $\{T_0, T_1, \dots, T_n\}$ de Chebyshev definidos recursivamente es ortogonal en $[-1, 1]$ c/r a la f.p. $\omega(x) = (1-x^2)^{-1/2}$:

$$T_0(x) = 1 \quad T_1(x) = x$$

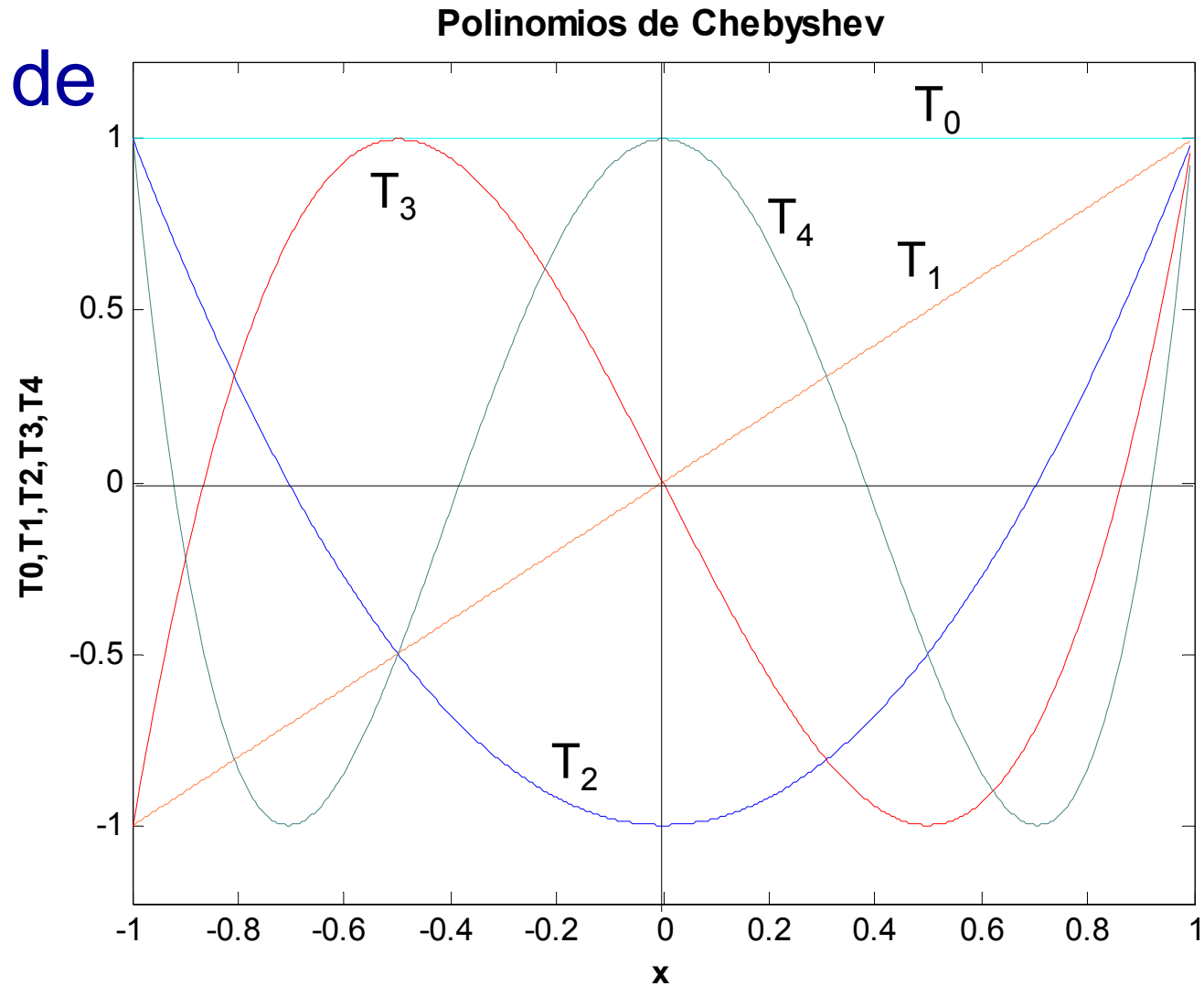
$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \quad \forall k \geq 1$$

- Se utilizan para ubicar los puntos interpolantes debido a que minimizan el error de interpolación de Lagrange

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Polinomios de Chebyshev

Polinomios de Chebyshev



Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Polinomios de Chebyshev

- Teo: El polinomio de Chebyshev $T_n(x)$ de grado $n \geq 1$ tiene n ceros simples en $[-1, 1]$ definidos por:

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

- Adicionalmente $T_n(x)$ alcanza sus extremos en:

$$\hat{x}_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad T_n(\hat{x}_k) = (-1)^k \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Polinomios de Chebyshev

- Teo: Si $p_{L,C}(x)$ es el polinomio de Lagrange de grado n definido en los ceros del polinomio de Chebyshev $T_n(x)$, se tiene que:

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_{L,C}(x)| \leq \frac{1}{2^n (n+1)!} \max_{x \in [-1,1]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Para cualquier $f \in \zeta^{n+1}[-1,1]$

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Polinomios de Chebyshev

- Ejemplo: Interpolación de $f(x) = xe^x$ en $[0, 1.5]$

x	$f(x) = xe^x$	$p_L(x)$	$ f(x) - p_L(x) $	$p_{L,C}(x)$	$ f(x) - p_{L,C}^C(x) $
0.15	0.1743	0.1969	0.0226	0.1868	0.0125
0.35	0.4967	0.5121	0.0154	0.5064	0.0097
0.75	1.588	1.572	0.016	1.571	0.017
1.15	3.632	3.650	0.018	3.644	0.012
1.35	5.208	5.237	0.029	5.224	0.016

Interp. y Aprox. de Funciones:

6) Interpolación Trigonométrica



■ Teorema de Interpolación Trigonométrica:

Considere $2m$ puntos (x_j, y_j) $j=0,1,\dots,2m-1$,
con: $x_j = -\pi + j\pi/m$ (dist. uniforme en $[-\pi, \pi]$).

Dados los coeficientes:

$$a_k \quad \forall k = 0, \dots, n \quad b_k \quad \forall k = 1, \dots, n-1$$

Se define la función de interpolación

$$S_n(x_j) = a_0 + a_n \cos(nx_j) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos(kx_j) + b_k \sin(kx_j))$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

6) Interpolación Trigonométrica



- Los coeficientes a_k, b_k que minimizan el error de interpolación trigonométrico :

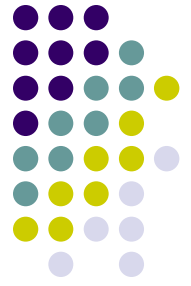
$$\min_{a_k, b_k} \mathcal{E}_T = \sum_{j=0}^{2m-1} \left[y_j - S_n(x_j) \right]^2$$

- Están dados por:

$$a_k = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos(kx_j) \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, n$$
$$b_k = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin(kx_j) \quad \forall k = 1, 2, \dots, n-1$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

6) Aproximación Trigonométrica



- Teo: Las funciones $F_n = \{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{2n-1}\}$ son ortogonales en $[-\pi, \pi]$ para la función de peso $\omega(x) = 1$:

$$\begin{aligned}\phi_0(x) &= \frac{1}{2} \\ \phi_k(x) &= \cos(kx) \quad k = 1, 2, \dots, n \\ \phi_{n+k}(x) &= \sin(kx) \quad k = 1, \dots, n-1\end{aligned}$$

- El conjunto de funciones generado por F_n se denomina polinomios trigonométricos Π_n

Interp. y Aprox. de Funciones:

6) Aproximación Trigonométrica



- Para una función $f \in \zeta[-\pi, \pi]$ la aproximación de mínimos cuadrados en Π_n es de la forma:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos(nx) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

- donde los coeficientes a_k, b_k están dados por:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

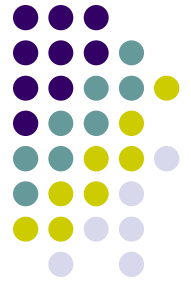
$$k=0, 1, \dots, n$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

$$k=1, 2, \dots, n-1$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

6) Aproximación Trigonométrica

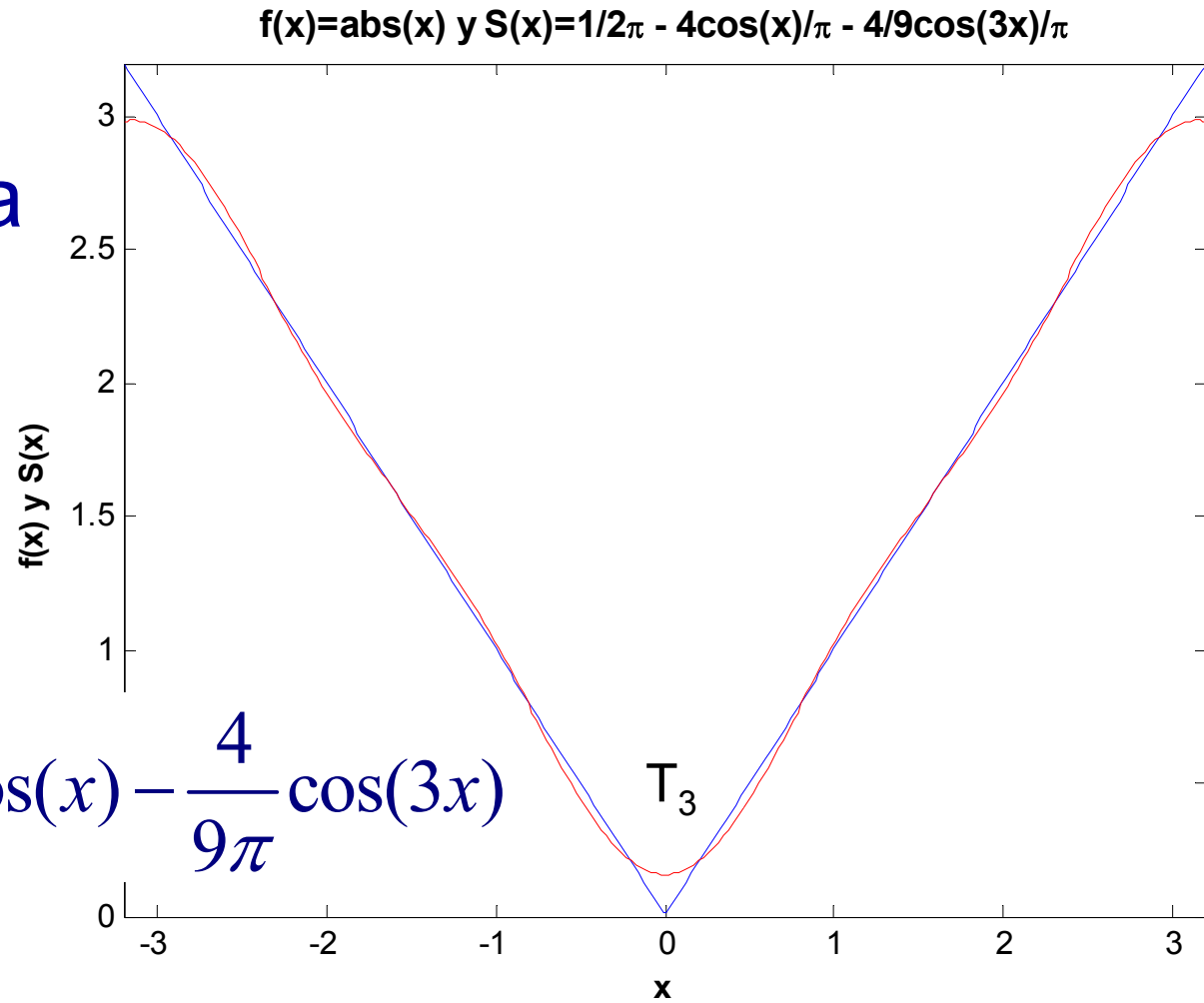


Aproximación
trigonométrica
de:

$$f(x) = |x|$$

$$x \in [-\pi, \pi]$$

$$S_3(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos(x) - \frac{4}{9\pi} \cos(3x)$$



Interp. y Aprox. de Funciones:

6) Aprox. – Interp. Trigonométrica



■ Ejercicios

- 1) Determine los polinomios trigonométricos continuos de $S_2(x)$ y $S_3(x)$ de x^2
- 2) Determine el polinomio trigonométrico continuo $S_n(x)$ de e^x
- 3) Determine el pol. trigonométrico discreto $S_3(x)$ de $f(x) = e^x \cos(x)$ para $m = 4$ en $[-\pi, \pi]$
- 4) Determine el pol. trigonométrico discreto $S_4(x)$ de $f(x) = x^2 \sin(x)$ para $m = 5$ en $[0, 1]$

Interp. y Aprox. de Funciones:

Bibliografía



- 1) R. Burden & J. D. Faires, Análisis Numérico, Séptima Edición, Thomson Learning, 2002.
- 2) J. Stoer & R. Burlisch, Introduction to Numerical Analysis, Second Edition, Springer, 1992.
- 3) G. Hernández: Apuntes de Cálculo Numérico 2007