Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Semestre Otoño 2007
Cálculo Numérico
MA33A-02

Profesor: Gonzalo Hernández.
Auxiliar: Gonzalo Ríos, Constanza Maturana
Fecha: 11 de Abril

Auxiliar 5: Polinomios de Interpolación

Resumen Materia

1. **Teorema de Weirstrass:** Sea f:$[a,b] \to \mathbb{R}$ continua. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists p$ polinomio tal que $\forall x \in [a,b]$,$|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon$

2. **Polinomio de Taylor:** $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

3. **Error de Taylor:** $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ donde $\xi \in [x, x_0]$

4. **Polinomio de Lagrange:** $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_{n,i}(x)$ donde $L_{n,i}(x) = \frac{(x-x_0)....(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)....(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$

5. **Error de Lagrange:** $E_n(x) = \Pi_{i=0}^{n}(x-x_i)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ donde $\xi \in [a,b]$

6. **Cota de Error de Lagrange:** $|f(x) - P_n(x)| \leq Mh^{n+1}$ donde $M = \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$ y $h = \max_{i\geq 0}|x_{i+1} - x_i|$

7. **Polinomio Osculante:** Dados $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(n+1)$ reales distintos en $[a,b]$, $m_0, m_1, \ldots, m^n$ (enteros no negativos). El polinomio osculante es el polinomio de menor grado tal que $\frac{d^k p}{dx^k}(x_i) = \frac{d^k f}{dx^k}(x_i) \forall k = 0...m_i, \forall i = 0...n$. El grado de este polinomio osculante es a lo más $M = \sum_{i=0}^{n} m_i + n$

8. **Polinomio de Hermite:** $H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) H_{n,i}(x) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i)\hat{H}_{n,i}(x)$ donde

   (a) $H_{n,i}(x) = (1 - 2(x-x_i)L'_{n,i}(x))L^2_{n,i}(x)$ $\quad \hat{H}_{n,i}(x) = (x-x_i)L^2_{n,i}(x)$

   (b) $\forall i, k = 0, 1...n$ $\quad H_{n,i}(x_k) = \delta_{ik}$ $\quad H'_{n,i}(x_k) = 0$ $\quad \hat{H}_{n,i}(x_k) = 0$ $\quad \hat{H}'_{n,i}(x_k) = \delta_{ik}$

9. **Error de Hermite:** $E_{2n+1}(x) = \Pi_{i=0}^{n}(x-x_i)^2 \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}$ donde $\xi \in [a,b]$

10. **Polinomio de Newton:** $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i N_i(x)$ donde $N_i(x) = \Pi_{k=0}^{i-1}(x-x_k)$ y $a_i = \sum_{k=0}^{i} \frac{f(x_k)}{\Pi_{j=0, j\neq k}^{i}(x_k - x_j)}$

    Obs: Si se agrega un punto x_{n+1}se cumple que $P_{n+1}(x) = P_n(x) + a_{n+1}N_{n+1}(x)$

11. **Diferencias Divididas:** $f[x_k...x_m] = \sum_{i=k}^{m} \frac{f(x_i)}{\Pi_{j=k, j\neq i}^{m}(x_i - x_j)}$ con $f[x_i] = f(x_i)$ y se cumple $f[x_k...x_m] = \frac{f[x_{k+1}...x_m] - f[x_k...x_{m-1}]}{x_m - x_k}$

    (a) $P_n(x) = f[x_n] + (x-x_n) f[x_{n-1}, x_n] + (x-x_n)(x-x_{n-1}) f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] + ... + \Pi_{j=0}^{n}(x-x_j) f[x_0...x_n]$
    $= f[x_0] + (x-x_0) f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0, x_1, x_2] + ... + \Pi_{j=0}^{n}(x-x_j) f[x_0...x_n]$

    (b) $f\underbrace{[x_0...x_0]}_{\text{n+1 veces}} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Problemas

1. Una fábrica de mermeladas de membrillo desea expandir su mercado, por lo que decide envasar la mermelada en frascos que contengan 1 kilo de mermelada a temperatura ambiente (15°). Al preparar la mermelada, esta puede alcanzar temperaturas cerca de las 80°C, por lo que aumenta su volumen, y luego al enfriar la mermelada, esta diminuye su volumen, y el proceso de sellado obliga a la fábrica a envasar la mermelada calientita a 50°. La fábrica produce una mermelada normal y una dietética, con 40% y 15% de concentración de azucar respectivamente, las cuales la empresa ya conoce sus propiedades para el envasado. El cocinero jefe ha creado una mermelada semi dietética con un 25% de concentración de azucar. La fábrica desea conocer el volumen que tendrá la mermelada al momento de envasado, para diseñar el tamaño y la forma de los frascos, y que volumen tandrá a temperatura ambiente, para ver el material del frasco, para que soporte la diferencia de presión. Para esto, se tienen los datos de las mermeladas normal y dietética, con 1 kilo cada una:

%╲T°	5°	10°	20°	40°	80°
15	880 cc	950 cc	1030 cc	1080 cc	1250 cc
40	900 cc	1010 cc	1090 cc	1150 cc	1280 cc

2. La empresa Ferrari realiza pruebas de su nuevo modelo "Relampago McQueen", por lo que se han tomado los siguientes datos:

$Tiempo\ [s]$	0	3	5
$Velocidad\ [\frac{km}{h}]$	0	63	108

   (a) Calcule la velocidad en función del tiempo.

   (b) Aproxime la distancia en función del tiempo integrando el polinomio anterior.

   (c) Se midió la distancia de "Relampago McQueen" en $t = 7$, y se agregó el dato que ha recorrido $\frac{10\,567}{72}$ m. Determine el polinomio de Hermite que interpola distancia y velocidad del automovil,

   (d) Calcule la velocidad en $t = 7$.

Respuestas

1. Newton

   (a) Volumen en función de la temperatura

      i. 15% $Lagrange :$ $\begin{bmatrix} i & t_i & V(t_i) & L_{4,i}(t) \\ 0 & 5 & 880 & \frac{(t-10)(t-20)(t-40)(t-80)}{(5-10)(5-20)(5-40)(5-80)} \\ 1 & 10 & 950 & \frac{(t-5)(t-20)(t-40)(t-80)}{(10-5)(10-20)(10-40)(10-80)} \\ 2 & 20 & 1030 & \frac{(t-5)(t-10)(t-40)(t-80)}{(20-5)(20-10)(20-40)(20-80)} \\ 3 & 40 & 1080 & \frac{(t-5)(t-10)(t-20)(t-80)}{(40-5)(40-10)(40-20)(40-80)} \\ 4 & 80 & 1250 & \frac{(t-5)(t-10)(t-20)(t-40)}{(80-5)(80-10)(80-20)(80-40)} \end{bmatrix}$

      $P_{15}(t) = \sum_{i=0}^{4} V(t_i)L_{4,i}(t)$

      $= 880\frac{(t-10)(t-20)(t-40)(t-80)}{(5-10)(5-20)(5-40)(5-80)} + 950\frac{(t-5)(t-20)(t-40)(t-80)}{(10-5)(10-20)(10-40)(10-80)} + 1030\frac{(t-5)(t-10)(t-40)(t-80)}{(20-5)(20-10)(20-40)(20-80)}$

      $+1080\frac{(t-5)(t-10)(t-20)(t-80)}{(40-5)(40-10)(40-20)(40-80)} + 1250\frac{(t-5)(t-10)(t-20)(t-40)}{(80-5)(80-10)(80-20)(80-40)}$

      $\Longrightarrow P_{15}(t) = \frac{49\,274}{63} + \frac{1915}{84}t - \frac{497}{720}t^2 + \frac{157}{16\,800}t^3 - \frac{53}{1260\,000}t^4$

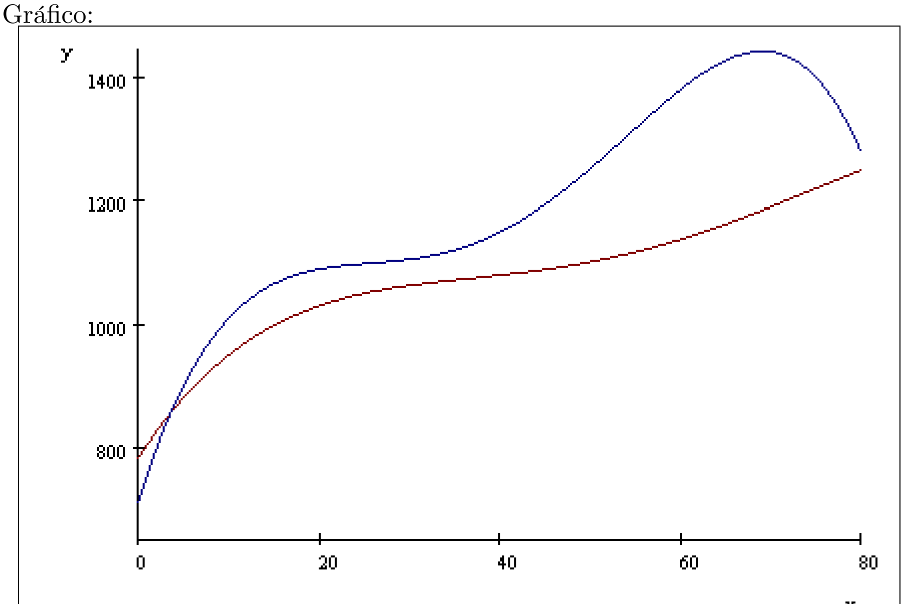
      ii. 40% $Newton :$ $\begin{bmatrix} t_i & V(t_i) & V[t_i, t_{i+1}] & V[t_i...t_{i+2}] & V[t_i...t_{i+3}] & V[t_i...t_{i+4}] \\ 5 & 900 & \frac{1010-900}{10-5} = 22 & \frac{8-22}{20-5} = -\frac{14}{15} & \frac{-\frac{1}{6}+\frac{14}{15}}{40-5} = \frac{23}{1050} & \frac{\frac{41}{16\,800}-\frac{23}{1050}}{80-5} = -\frac{109}{420\,000} \\ 10 & 1010 & \frac{1090-1010}{20-10} = 8 & \frac{3-8}{40-10} = -\frac{1}{6} & \frac{\frac{1}{240}+\frac{1}{6}}{80-10} = \frac{41}{16\,800} & \\ 20 & 1090 & \frac{1150-1090}{40-20} = 3 & \frac{\frac{13}{4}-3}{80-20} = \frac{1}{240} & & \\ 40 & 1150 & \frac{1280-1150}{80-40} = \frac{13}{4} & & & \\ 80 & 1280 & & & & \end{bmatrix}$

      $P_{40}(t) = 900 + 22(t-5) - \frac{14}{15}(t-5)(t-10)$

      $+\frac{23}{1050}(t-5)(t-10)(t-20) - \frac{109}{420\,000}(t-5)(t-10)(t-20)(t-40)$

      $\Longrightarrow P_{40}(t) = \frac{14\,932}{21} + \frac{3995}{84}t - \frac{517}{240}t^2 + \frac{139}{3360}t^3 - \frac{109}{420\,000}t^4$

      iii. Gráfico:



      Rojo : $P_{15}(t) = \frac{49\,274}{63} + \frac{1915}{84}t - \frac{497}{720}t^2 + \frac{157}{16\,800}t^3 - \frac{53}{1260\,000}t^4$

      Azul : $P_{40}(t) = \frac{14\,932}{21} + \frac{3995}{84}t - \frac{517}{240}t^2 + \frac{139}{3360}t^3 - \frac{109}{420\,000}t^4$

(b) Volumen en función de la concentración a 15°

i. $\begin{bmatrix} \% & V(\%) & L_{2,i} \\ 15 & P_{15}(15) = \frac{1006\,175}{1008} & \frac{c-40}{15-40} \\ 40 & P_{40}(15) = \frac{358\,255}{336} & \frac{c-15}{40-15} \end{bmatrix}$

ii. $V_{15}(c) = \frac{1006\,175}{1008}\frac{c-40}{15-40} + \frac{358\,255}{336}\frac{c-15}{40-15} = \frac{6859}{2520}c + \frac{965\,021}{1008}$
$\Longrightarrow V_{15}(c) = \frac{965\,021}{1008} + \frac{6859}{2520}c$

iii. $V_{15}(25) = \frac{344\,537}{336} = 1025.\,407\,738\,095\,238\,095\,2$

iv. La mermelada tendrá un volumen de 1025.4 cc a temperatura ambiente

(c) Volumen en función de la concentración a 50°

i. $\begin{array}{lll} \% & V(\%) & V[\%_i, \%_{i+1}] \\ 15 & P_{15}(50) = \frac{7711}{7} & \frac{\frac{8769}{7} - \frac{7711}{7}}{40-15} = \frac{1058}{175} \quad : \quad \frac{1058}{175} \\ 40 & P_{40}(50) = \frac{8769}{7} & \end{array}$

ii. $V_{50}(c) = \frac{7711}{7} + \frac{1058}{175}(c-15) = \frac{1058}{175}c + \frac{35\,381}{35}$
$\Longrightarrow V_{50}(c) = \frac{35\,381}{35} + \frac{1058}{175}c$

iii. $V_{50}(25) = \frac{40\,671}{35} = 1162.\,028\,571\,428\,571\,428\,6$

iv. La mermelada calientita tendrá un volumen de 1162 cc en el envasado.

2. Hermite por Newton

(a) $\begin{bmatrix} Tiempo\ [s] & 0 & 3 & 5 \\ Velocidad\ [\frac{km}{h}] & 0 & 63 & 108 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Tiempo\ [s] & 0 & 3 & 5 \\ Velocidad\ [\frac{m}{s}] & 0 & \frac{63000}{3600} = \frac{35}{2} & \frac{108000}{3600} = 30 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} t_i & v(t_i) & v[t_i, t_{i+1}] & v[t_i, ..., t_{i+2}] \\ 0 & 0 & \frac{\frac{35}{2}-0}{3-0} = \frac{35}{6} & \frac{\frac{25}{4} - \frac{35}{6}}{5-0} = \frac{1}{12} \\ 3 & \frac{35}{2} & \frac{30-\frac{35}{2}}{5-3} = \frac{25}{4} & \\ 5 & 30 & & \end{bmatrix}$

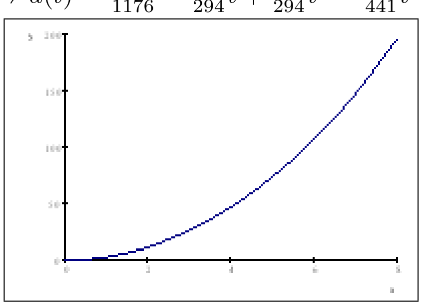
$\Longrightarrow v(t) = 0 + \frac{35}{6}t + \frac{1}{12}t(t-3) = \frac{67}{12}t + \frac{1}{12}t^2$

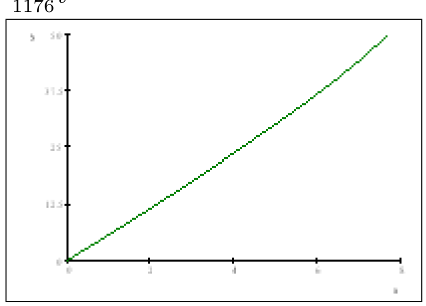
(b) $d(t) = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t (\frac{67}{12}t + \frac{1}{12}t^2) = \frac{67}{24}t^2 + \frac{1}{36}t^3$
$d(0) = 0$
$d(3) = \frac{67}{24}3^2 + \frac{1}{36}3^3 = \frac{207}{8}$
$d(5) = \frac{67}{24}5^2 + \frac{1}{36}5^3 = \frac{5275}{72}$

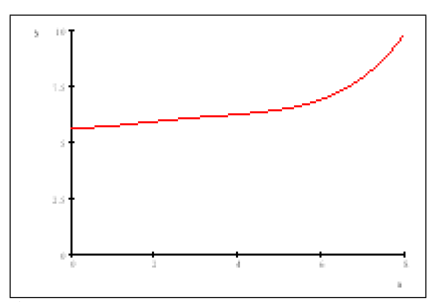
(c) $\begin{bmatrix} Tiempo\ [s] & 0 & 3 & 5 & 7 \\ Dis\tan cia[m] & 0 & \frac{207}{8} & \frac{5275}{72} & \frac{10\,567}{72} \\ Velocidad\ [\frac{m}{s}] & 0 & \frac{35}{2} & 30 & ? \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} t_i & d(t_i) & d[t_i, t_{i+1}] & d[t_i, ..., t_{i+2}] & d[t_i, ..., t_{i+3}] & d[t_i, ..., t_{i+4}] & d[t_i, ..., t_{i+5}] & d[t_i, ..., t_{i+6}] \\ 0 & 0 & v(0) = 0 & \frac{\frac{69}{8}-0}{3-0} = \frac{23}{8} & \frac{\frac{71}{24} - \frac{23}{8}}{3-0} = \frac{1}{36} & \frac{\frac{1}{36} - \frac{1}{36}}{5-0} = 0 & \frac{0-0}{5-0} = 0 & \frac{\frac{1}{1008}-0}{7-0} = \frac{1}{7056} \\ 0 & 0 & \frac{\frac{207}{8}-0}{3-0} = \frac{69}{8} & \frac{\frac{35}{2} - \frac{69}{8}}{3-0} = \frac{71}{24} & \frac{\frac{223}{72} - \frac{71}{24}}{5-0} = \frac{1}{36} & \frac{\frac{1}{36} - \frac{1}{36}}{5-0} = 0 & \frac{\frac{1}{144}-0}{7-0} = \frac{1}{1008} & \\ 3 & \frac{207}{8} & v(3) = \frac{35}{2} & \frac{\frac{853}{36} - \frac{35}{2}}{5-3} = \frac{223}{72} & \frac{\frac{227}{72} - \frac{223}{72}}{5-3} = \frac{1}{36} & \frac{\frac{1}{18} - \frac{1}{36}}{7-3} = \frac{1}{144} & & \\ 3 & \frac{207}{8} & \frac{\frac{5275}{72} - \frac{207}{8}}{5-3} = \frac{853}{36} & \frac{30-\frac{853}{36}}{5-3} = \frac{227}{72} & \frac{\frac{27}{8} - \frac{227}{72}}{7-3} = \frac{1}{18} & & & \\ 5 & \frac{5275}{72} & v(5) = 30 & \frac{\frac{147}{4}-30}{7-5} = \frac{27}{8} & & & & \\ 5 & \frac{5275}{72} & \frac{\frac{10\,567}{72} - \frac{5275}{72}}{7-5} = \frac{147}{4} & & & & & \\ 7 & \frac{10\,567}{72} & & & & & & \end{bmatrix}$

$d(t) = (\frac{67}{24}t^2 + \frac{1}{36}t^3) + \frac{1}{7056}t^2(t-3)^2(t-5)^2$
$\Longrightarrow d(t) = \frac{6641}{2352}t^2 - \frac{11}{1764}t^3 + \frac{47}{3528}t^4 - \frac{1}{441}t^5 + \frac{1}{7056}t^6$
$\Longrightarrow v(t) = \frac{6641}{1176}t - \frac{11}{588}t^2 + \frac{47}{882}t^3 - \frac{5}{441}t^4 + \frac{1}{1176}t^5$
$\Longrightarrow a(t) = \frac{6641}{1176} - \frac{11}{294}t + \frac{47}{294}t^2 - \frac{20}{441}t^3 + \frac{5}{1176}t^4$


Distancia


Velocidad


Aceleración