Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Semestre Otoño 2007
Cálculo Numérico
MA33A-02

Profesor: Gonzalo Hernández.
Auxiliar: Gonzalo Ríos, Constanza Maturana
Fecha: 05 de Julio

Pauta Examen

1. Polinomios

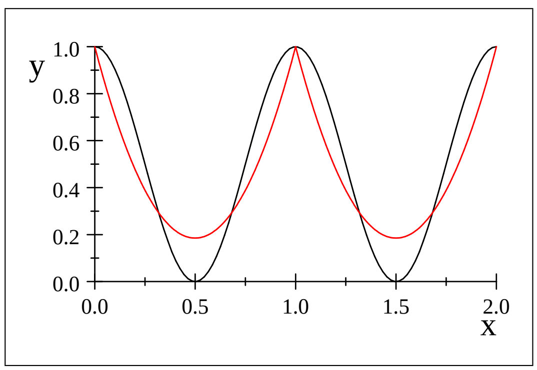
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se desea encontrar un método para encontrar una función $p(x)$ definida por trazos, de clase $\mathcal{C}^2$, que interpole a $f(x)$ en los puntos $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ y aproxime por mínimos cuadrados dentro de cada intervalo. Para esto:

(a) Con la suposición que $p(x)$ está definida por trazos por polinomios, todos del mismo grado, indique la forma de $p(x)$, las condiciones de continuidad e interpolación y el grado mínimo de los polinomios. ¿Este problema tiene solución única ? Explique.

(b) Para lograr una mayor precisión, aumente en un grado a los polinomios, y plantee el problema de optimización con restricciones para encontrar $p(x)$ que minimica el error de aproximación. ¿Este problema tiene solución? Explique

(c) Si se pide que $p(x)$ sea solo de clase $\mathcal{C}^0$, indique las condiciones para que $p(x)$ interpole, el grado mínimo de los polinomios, aumente en un grado a los polinomios, y plantee el problema de optimización con restricciones para encontrar $p(x)$ que minimica el error de aproximación.¿Para este caso se puede resolver el problema de forma independiente por trazo? Explique.

(d) Aplique el método de la parte c) a la función $f(x) = \cos^2 \pi x$, con la malla $\{0, 1, 2\}$.



Como ayuda, puede seguir los siguientes pasos:

i. Considere $p_1(x) = a+bx+cx^2$. Plantee el problema de mínimos cuadrados con las restricciones de interpolación en el intervalor $[0, 1]$.
ii. Con las restricciones, encuentre la constante a, y despeje c en función de b.
iii. Replantee el problema con 1 sola variable.
iv. Resuelva el problema, y deje explicita la forma de $p_1(x)$.
v. Por simetría de $f(x)$ y de la malla, encuentre $p_2(x)$.

2. Disertaciones

(a) Ecuaciones no lineales

Considere los siguientes métodos:

- Método de Muller
- Método de la posición falsa
- Método de Steffensen

Para cada uno de estos métodos:

i. Dé el número de puntos iniciales necesarios, y como empieza la iteración.
ii. Qué es lo que hace en cada iteración.
iii. Muestre gráficamente el método.
iv. Comparelo con algun(os) método(s) pasado(s) en clase similares. (No haga iteraciones)

Usando los 3 métodos juntos, encuentre una raiz de $f(x) = e^x - 3x^2$ en el intervalo $[3, 5]$. (Aplique 2 iteraciones en serie de los métodos)

(b) Sistema de ecuaciones lineales

Considere el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

i. Se propone resolver el método anterior a través de series de Neumann. ¿Es esto posible? Explique.
ii. Resuelva el sistema a mediante el método de Cramer. ¿Esta solución es exacta o aproximada?
iii. Aplique el método de la relajación con el punto inicial nulo. ¿ Converge este método?

Respuestas

1. Polinomios

   (a) Forma: $p(x) = p_k(x)$ si $x \in [x_k, x_{k+1}]$ $\forall k = 0...n-1$, donde $p_k(x)$ son polinomios a determinar.
   Condiciones:

   i. Interpolación: $p_k(x_k) = f(x_k)$ $\forall k = 0...n-1$ y $p_{n-1}(x_n) = f(x_n)$ $\Rightarrow$n+1 condiciones
   ii. Continuidad: $p_{k-1}(x_k) = p_k(x_k)$ $\forall k = 1...n-1$ $\Rightarrow$n-1 condiciones
   iii. 1° Derivada: $\frac{dp_{k-1}}{dx}(x_k) = \frac{dp_k}{dx}(x_k)$ $\forall k = 1...n-1$ $\Rightarrow$n-1 condiciones
   iv. 2° Derivada: $\frac{d^2p_{k-1}}{d^2x}(x_k) = \frac{d^2p_k}{d^2x}(x_k)$ $\forall k = 1...n-1$ $\Rightarrow$n-1 condiciones
   Total condiciones: 4n-2

   Grado de los polinomios: Como tenemos n polinomios y $4n-2$ condiciones, entonces los polinomios deben ser de grado 3, ie, $p_k(x) = a_k + b_kx + c_kx^2 + d_xx^3$
   Como podemos ver, este problema no tiene una única solución, ya que hay $4n$ incógnitas y $4n-2$ condiciones, por lo que se deben agregar dos condiciones adicionales (de borde por ejemplo) para que el sistema tenga solución única.

   (b) Al aumentar en un grado a los polinomios, estos serán de grado 4:
   $p_k(x) = a_k + b_kx + c_kx^2 + d_xx^3 + e_kx^4$
   Entonces, el problema de optimización con restricciones es:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \int_{x_0}^{x_n} (f(x) - p(x))^2 dx & \\
 & p_k(x_k) = f(x_k) & \forall k = 0...n-1 \\
 & p_{n-1}(x_n) = f(x_n) & \\
s.a & p_{k-1}(x_k) = p_k(x_k) & \forall k = 1...n-1 \\
 & \frac{dp_{k-1}}{dx}(x_k) = \frac{dp_k}{dx}(x_k) & \forall k = 1...n-1 \\
 & \frac{d^2p_{k-1}}{d^2x}(x_k) = \frac{d^2p_k}{d^2x}(x_k) & \forall k = 1...n-1
\end{array}
$$

   y dejandolo expresado en los coeficientes:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (a_k + b_kx + c_kx^2 + d_xx^3 + e_kx^4 - f(x))^2 dx & \\
 & a_k + b_kx_k + c_kx_k^2 + d_xx_k^3 + e_kx_k^4 = f(x_k) & \forall k = 0...n-1 \\
 & a_{n-1} + b_{n-1}x_n + c_{n-1}x_n^2 + d_{n-1}x_n^3 + e_{n-1}x_n^4 = f(x_n) & \\
s.a & a_{k-1} + b_{k-1}x_k + c_{k-1}x_k^2 + d_{k-1}x_k^3 + e_{k-1}x_k^4 = a_k + b_kx_k + c_kx_k^2 + d_xx_k^3 + e_kx_k^4 & \forall k = 1...n-1 \\
 & b_{k-1} + 2c_{k-1}x_k + 3d_{k-1}x_k^2 + 4e_{k-1}x_k^3 = b_k + 2c_kx_k + 3d_xx_k^2 + 4e_kx_k^3 & \forall k = 1...n-1 \\
 & 2c_{k-1} + 6d_{k-1}x_k + 12e_{k-1}x_k^2 = 2c_k + 6d_xx_k + 12e_kx_k^2 & \forall k = 1...n-1
\end{array}
$$

   Este problema tiene solución única, ya que la función a minimizar siempre es positiva, así que el mínimo siempre se alcanza.

   (c) Si $p(x)$ es solo de clase $\mathcal{C}^0$, entonces las condiciones son:

   i. Interpolación: $p_k(x_k) = f(x_k)$ $\forall k = 0...n-1$ y $p_{n-1}(x_n) = f(x_n)$ $\Rightarrow$n+1 condiciones
   ii. Continuidad: $p_{k-1}(x_k) = p_k(x_k)$ $\forall k = 1...n-1$ $\Rightarrow$n-1 condiciones
   Lo que da un total de $2n$ condiciones, por lo que los polinomios deben de ser grado 1, es decir: $p_k(x) = a_k + b_kx$
   Este sistema tiene solución única, ya que son $2n$ condiciones y $2n$ incógnitas.
   Al aumentar el grado de los polinomios, entonces estos quedan:
   $p_k(x) = a_k + b_kx + c_kx^2$
   El problema de optimizacion es:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \int_{x_0}^{x_n} (f(x) - p(x))^2 dx & \\
 & p_k(x_k) = f(x_k) & \forall k = 0...n-1 \\
s.a & p_{n-1}(x_n) = f(x_n) & \\
 & p_{k-1}(x_k) = p_k(x_k) & \forall k = 1...n-1
\end{array}
$$

y dejandolo expresado en los coeficientes:

$$\begin{array}{lll} \min & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (a_k + b_k x + c_k x^2 - f(x))^2 dx & \\ & a_k + b_k x_k + c_k x_k^2 = f(x_k) & \forall k = 0...n-1 \\ s.a & a_{n-1} + b_{n-1} x_n + c_{n-1} x_n^2 = f(x_n) & \\ & a_{k-1} + b_{k-1} x_k + c_{k-1} x_k^2 = a_k + b_k x_k + c_k x_k^2 & \forall k = 1...n-1 \end{array}$$

En este caso, el problema de interpolación es simplemente calcular la recta $p_k(x)$ que interpola a x_k y a x_{k+1}, $\forall k = 0...n-1$. Podemos ver que las rectas son independientes entre sí, ya que solo dependen de los puntos x_k y x_{k+1}.Entonces, al aumentar en un grado los polinomios, el problema de optimización general se puede resolver de forma independiente para cada trazo:

$$P_k) \quad \begin{array}{ll} \min & \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (a_k + b_k x + c_k x^2 - f(x))^2 dx \\ s.a & \begin{array}{l} a_k + b_k x_k + c_k x_k^2 = f(x_k) \\ a_k + b_k x_{k+1} + c_k x_{k+1}^2 = f(x_{k+1}) \end{array} \end{array}$$

$\forall k = 0...n-1$

(d) Siguiendo las indicaciones para $f(x) = \cos^2 \pi x$, con la malla $\{0, 1, 2\}$:

i. Considerando $p_1(x) = a + bx + cx^2$, plantiemos el problema de mínimos cuadrados con las restricciones de interpolación en el intervalor $[0, 1]$.

$$\begin{array}{ll} \min & \int\limits_0^1 (a + bx + cx^2 - \cos^2 \pi x)^2 dx \\ s.a & \begin{array}{c} a = 1 \\ a + b + c = 1 \end{array} \end{array}$$

ii. Con las restricciones:
$a = 1$
$c = -b$

iii. Replanteando el problema con 1 sola variable.

$$\min \quad \int\limits_0^1 (1 + b(x - x^2) - \cos^2 \pi x)^2 dx$$

iv. Resolviendo el problema:
$E(b) = \int\limits_0^1 (1 + b(x - x^2) - \cos^2 \pi x)^2 dx$
$\frac{\partial E}{\partial b} = 2 \int\limits_0^1 (1 + b(x - x^2) - \cos^2 \pi x)(x - x^2) dx = 0$
$\int\limits_0^1 ((x - x^2) + b(x - x^2)^2) dx = \int\limits_0^1 (x - x^2) \cos^2 \pi x dx$
$\Rightarrow b = \frac{\int\limits_0^1 (x-x^2) \cos^2 \pi x dx - \int\limits_0^1 (x-x^2) dx}{\int\limits_0^1 (x-x^2)^2 dx}$
Calculando las integrales:
$\int\limits_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}$
$\int\limits_0^1 (x - x^2)^2 dx = \frac{1}{30}$
$\int\limits_0^1 (x - x^2) \cos^2 \pi x dx = \frac{1}{12} - \frac{1}{4\pi^2}$
$\Rightarrow b = \frac{\frac{1}{12} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{30}} = -\frac{15}{2\pi^2} - \frac{5}{2}$
$p_1(x) = 1 - (\frac{15}{2\pi^2} + \frac{5}{2})x + (\frac{15}{2\pi^2} + \frac{5}{2})x^2$

v. Por simetría de $f(x)$ y de la malla, $p_2(x)$ es solo una traslación de $p_1(x)$, es decir:
$p_2(x) = p_1(x - 1)$
$\Rightarrow p_2(x) = 1 - (\frac{15}{2\pi^2} + \frac{5}{2})(x - 1) + (\frac{15}{2\pi^2} + \frac{5}{2})(x - 1)^2$

2. Disertaciones:

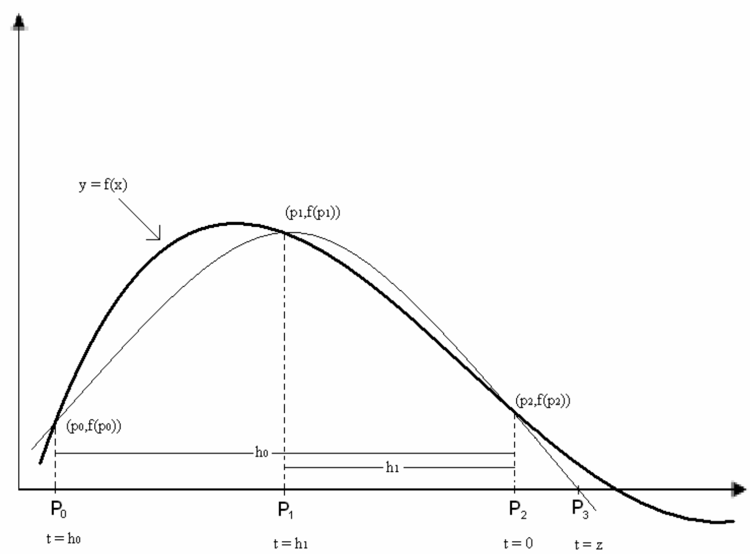
(a) **Método de Muller:**

i. Para el método es necesario empezar con 3 puntos. Al principio de la iteración de encuentran los valores de la función en esos tres puntos y se busca la ecuación de la parábola que pasa por esos 3 puntos.

ii. Tenemos 3 puntos: p_1, p_2 y p_3, sin perdida de generalidad suponemos que p_2 es la mejor aproximacion a la raiz. Se considera la parábola que pasa por los tres puntos y luego se hace un cambio de variable: $t = x - p_2$. Se utilizan las siguientes diferencias:

$$h_0 = p_0 - p_2 \quad y \quad h_1 = p_1 - p_2$$

Para encontrar los coeficientes de la parabola reemplazamos en $0, h_0$ y h_1, y obtenemos:
$t = h_0 : ah_0^2 + bh_0 + c = f(p_0)$
$t = h_1 : ah_1^2 + bh_1 + c = f(p_1)$
$t = 0 : a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = f(p_2)$
De la tercera ecuación se obtiene que: $c = f(p_2)$
Sustituyendo este resultado en las otras dos ecuaciones se obtiene que:
$ah_0^2 + bh_0 = f(p_0) - cah_1^2 + bh_1 = f(p_1) - c$
Tomando $e_0 = f(p_0) - c$ y $e_1 = f(p_1) - c$ resolvemos el sistema para encontrar a y b:
$a = \frac{(e_0 h_1 - e_1 h_0)}{(h_1 h_0^2 - h_0 h_1^2)}$
$b = \frac{(e_1 h_0^1 - e_0 h_1^2)}{(h_1 h_0^2 - h_0 h_2^2)}$
Luego las raíces $t = z_1, z_2$ de la parabola se obtienen usando la formula:
$z = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$
Para asegurar la estabilidad del método hay que elegir la raíz z de menor valor absoluto, con esto si $b > 0$, entonces usamos el signo positivo de la raíz cuadrada, mientras que si $b < 0$ entonces usamos el signo negativo.
El nuevo punto p_3 viene dado por:$p_3 = p_2 + z$
Para actualizar los valores y efectuar a siguiente iteración se eligen los nuevos p_0 y p_1 como los dos puntos mas cercanos a p_3 entre $\{p_0, p_1, p_2\}$, es decir se reemplazo el mas lejano y p_3 pasa a ser el nuevo p_2.

iii. 

iv. El método de Muller es comparable con el método de la secante ya que este hace algo similar pero con 2 puntos, por lo tanto el método de Muller se acerca mas rapido al cero.

Método de la posición falsa:

i. Para el método es necesario empezar con 2 puntos que determinen un intervalo don hay cambio de signo. Al principio de la iteración se debe encontrar las pendiente de la recta que pasa por los puntos dados por la función evaluada en los extramos.

ii. Suponemos que $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo. En el método de la bisección se usa el punto medio del intervalo $[a, b]$ para llevar a cabo el siguiente paso. Suele conseguirse una aproximación mejor usando el punto $(c, 0)$ en el que la recta secante L que pasa por los puntos $(a, f(a))y(b, f(b))$ cruza el eje OX. Para hallar el punto c, se igualan dos formulas para la pendiente de la recta L:

$$m = \frac{f(a) - f(b)}{b - a}$$

que resulta de usar los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)), y

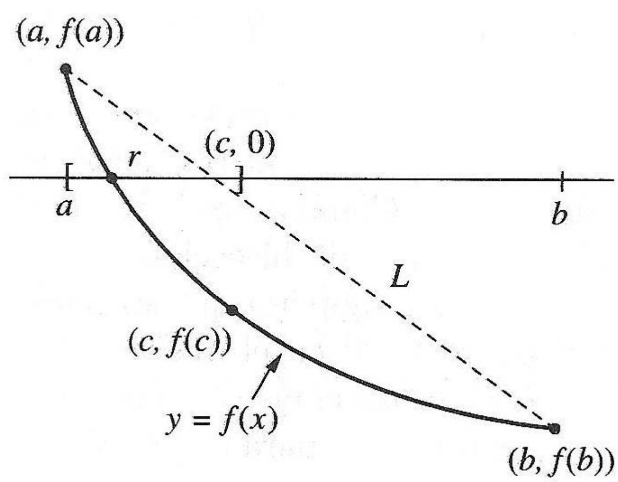
$$m = \frac{0 - f(b)}{c - b}$$

que resulta de usar los puntos (c, 0) y (b, f(b)).
Igualando las pendientes se tiene:

$$c = b + \frac{f(b)(b-a)}{f(a)-f(b)}$$

Se tienen las siguientes tres posibilidades:

A. Si $f(a)$ y $f(c)$ tienen distinto signo, entonces hay un cero en$[a, c]$.
B. Si $f(c)$ y $f(b)$ tienen distinto signo entonces hay un cero en $[c, b]$.
C. Si $f(c) = 0$, entonces c es un cero de f.



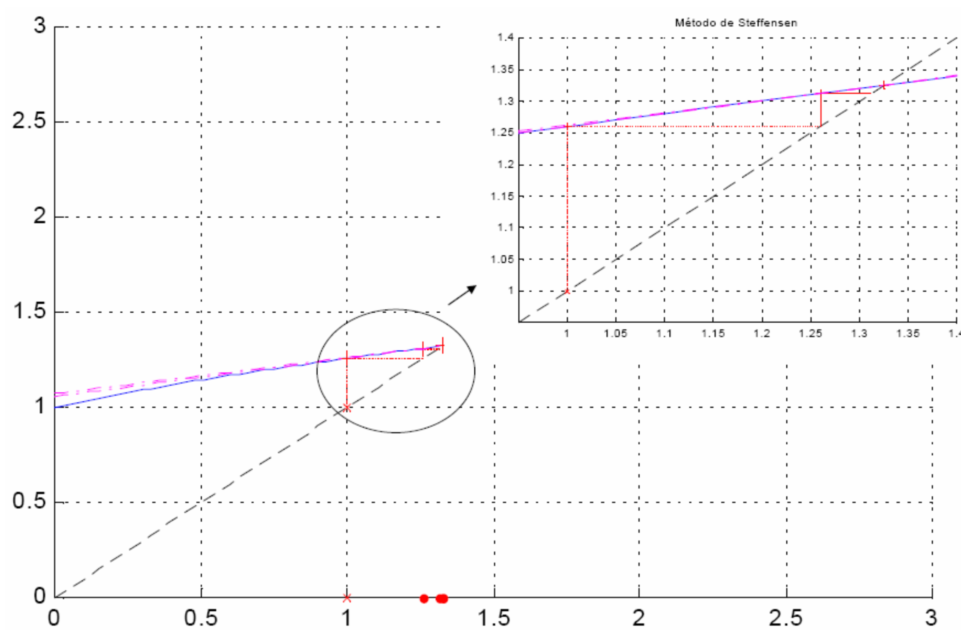
iii.

iv. El método de la posición falsa se puede comparar con el método de la bisección, la manera de dividir el intervalo es mas eficiente que cortarlo por la mitad, como lo hace el método de la bisección. Por lo tanto el método de la posición falsa es mas rápido.

Método de Steffesen:

i. Para el método es necesario empezar con solo un punto. Este método generaliza el del punto fijo, por lo que al principio de la iteración se calcula: $y_0 = f(x_0)$ $z_0 = f(y_0)$. donde x_0 es el punto inicial.

ii. En cada iteción se calcula:
$x_{n+1} = x_{n-} \frac{(y_n - x_n)}{2(z_n - 2y_n - x_n}$
Luego, si $|x_{n+1} - x_n| < toleracia$ Paramos de iterar.



iii.

iv. El método de Steffensen se puede comparar con el método del punto fijo. Este método es una mejora del de punto fijo en donde agiliza el proceso.

v. Debemos encontrar un cero de la función: $f(x) = e^x - 3 \cdot x^2$

A. Comenzamos con el método de la posición falsa:
$1°$ $Iteración:$
$f(3) = -6.9145$

$f(5)=73.413$
$\Rightarrow c_1=b-\frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}=5-\frac{73.413(5-3)}{73.413+6.9145}=3.1721$
$2°$ $Iteración:$
$f(3.1721)=-6.3291\Rightarrow el\ \ intervalo\ \ es:[3.1721,5]$
$\Rightarrow c_2=5-\frac{73.413(5-3.1721)}{73.413+6.3291}=3.318$

B. Continuamos iterando con el Método de Muller y los puntos iniciales:
$p_0=3.318\ \ p_1=3.418\ \ p_2=3.518$
$1°$ $Iteración:$
$h_0=p_0-p_2=|3.318-3.518|=0.2$
$h_1=p_1-p_2=|3.418-3.518|=0.1$
$e_0=f(p_0)-f(p_2)=-5.4223+3.412=-2.0103$
$e_1=f(p_1)-f(p_2)=-4.5398+3.412=-1.1278$
$a=\frac{-2.0103\cdot 0.1+1.1278\cdot 0.2}{0.1\cdot 0.04-0.2-0.01}=-0.11908$
$b=\frac{-1.1278\cdot 0.04+2.0103\cdot 0.01}{0.1\cdot 0.04-0.2\cdot 0.04}=6.2523$
Las raices de la parábola son:
$z_1=\frac{-2\cdot-3.412}{6.2523+\sqrt[2]{6.2523^2-4\cdot-0.11908\cdot-3.412}}=0.5515$
$z_1=\frac{-2\cdot-3.412}{6.2523-\sqrt[2]{6.2523^2-4\cdot-0.11908\cdot-3.412}}=51.954$
Como $b<0\Rightarrow p_3=p_2+z_2=3.518+0.5515=4.0695$
$2°$ $Iteración:$
$p_0=3.418\ \ p_1=3.518\ \ p_2=4.0695$
$h_0=p_0-p_2=|3.418-4.0675|=0.6495$
$h_1=p_1-p_2=|3.518-4.0675|=0.5495$
$e_0=f(p_0)-f(p_2)=-4.5398+8.8452=4.3054$
$e_1=f(p_1)-f(p_2)=-3.412+8.8452=5.4332$
$a=\frac{4.3054\cdot 0.5495-5.4332\cdot 0.6495}{0.5495\cdot 0.6495^2-0.6495\cdot 0.5495^2}=-32.587$
$b=\frac{5.4332\cdot 0.6495^2-4.3054\cdot 0.5495^2}{0.1\cdot 0.6495^2-0.6495\cdot 0.5495^2}=-6.444$
Las raices de la parábola son:
$z_1=\frac{-2\cdot(-3.412)}{-6.444\,6.2523+\sqrt[2]{(-6.444)^2-4\cdot(-32.587)\cdot(-8.8452)}}:-0.0099$
$z_2=\frac{-2\cdot(-3.412)}{-6.444\,6.2523-\sqrt[2]{(-6.444)^2-4\cdot(-32.587)\cdot(-8.8452)}}=-0.0099$
$\Rightarrow p_3=4.0695-0.099=3.9705$

C. Continuamos iterando con el Método de Steffersen y con punto inicial $x_0=3.9705$:
$g(x)=\sqrt{\frac{e^x}{3}}\qquad x_0=3.9705\quad y_0=\sqrt{\frac{e^{3.9705}}{3}}=4.204\qquad z_0=\sqrt{\frac{e^{4.204}}{3}}=4.724$
$x_1=3.90705-\frac{\sqrt{4.204-3.9705}}{4.724-2\cdot 4.204-3.9705}=3.9702$
$y_1=\sqrt{\frac{e^{3.9702}}{3}}=4.203\quad z_1=\sqrt{\frac{e^{4.203}}{3}}=4.7218$
$x_2=3.9702-\frac{\sqrt{4.203-3.9702}}{4.7218-2\cdot 4.203-3.97025}=4.0332$

i. Llamemos A a la matriz del sistema. Para poder usar las series de Newman debemos buscar una matriz B $talque\ \ A=(I-B)$, en nuestro caso:
$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5&-1&0\\-1&5&-1\\0&-1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&1&0\\1&-4&1\\0&1&-4\end{bmatrix}$
Calculemos la norma infinito de la matriz B:
$\|B\|_\infty=\max\{5;6;5\}=6>1$
Para utilizar el Mètodo de Newman la matriz debe tener norma infinito <1, en nuestro caso, eso no se cumple, pero podemos usar una matriz auxiliar C $talque:$
$C=\frac{1}{7}B=\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}-4&1&0\\1&-4&1\\0&1&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.5714&0.1429&0\\0.1429&-0.5714&0.1429\\0&0.1429&-0.5714\end{bmatrix}$
$\Rightarrow\|C\|_\infty=\max\{0.7143;0.8572;0.7143\}=0.7143<1$
Aplicamos las Series de Newman en la matriz C y se tiene que $B^{-1}=7C^{-1}$.

ii. $\det(A)=\begin{vmatrix}5&-1&0\\-1&5&-1\\0&-1&5\end{vmatrix}=5(25-1)+1(-5)=115$
$\det(Ax)=\begin{vmatrix}9&-1&0\\4&5&-1\\-6&-1&5\end{vmatrix}=5(45+4)+1(-9-6)=230$
$\det(Ay)=\begin{vmatrix}5&9&0\\-1&4&-1\\0&-6&5\end{vmatrix}=5(20-6)+1(45)=115$

$$\det(Az)=\begin{vmatrix}5 & -1 & 9\\ -1 & 5 & 4\\ 0 & -1 & -6\end{vmatrix}=5(-30+4)+1(6+9)=-115$$

$$\Rightarrow \text{La solución es :}\begin{bmatrix}\frac{|Ax|}{|A|}\\ \frac{|Ay|}{|A|}\\ \frac{|Az|}{|A|}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$$

Esta solución es exacta.

iii. Queremos resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{lcr} 5x-y=9 & & -x+0.2y+1.8=R_1\\ -x+5y-z=4 & \Rightarrow & 0.2x-y+0.2z+0.8=R_2\\ -y+5z=-6 & & 0.2y-z-1.2=R_3\end{array}$$

x	R_1	y	R_2	z	R_3
0	1.8	0	0.8	0	−1.2
1.8	0		1.16		−1.2
	0		0.92	−1.2	0
	0.184	0.92	0		0.184
	0.184		0.0368	0.184	0
0.184	0		0.0736		0
	0.0147	0.0736	0		0.0147
	0.0147		0.0029	0.0147	0
0.0147	0		0.0058		0

Como los residuos convergen a 0, el metodo converge a la solución, esta es:

$x=0+1.8+0.184+0.0147=1.9987\approx 2$

$y=0+0.92+0.0736+0.0058=0.9994\approx 1$

$z=0-1.2+0.184+0.0147=-1.0013\approx -1$