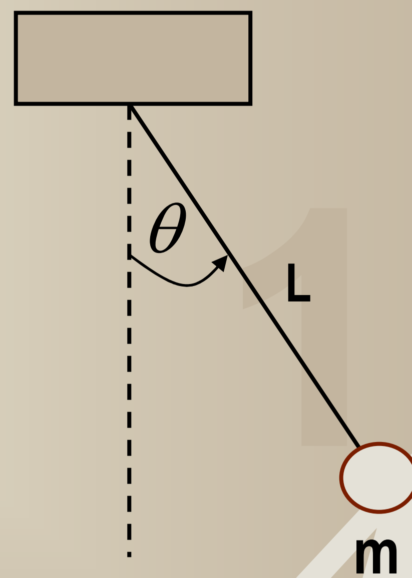
Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Matemática

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (No – Lineales)



MA-33A Cálculo Numérico

Gonzalo Hernández Oliva

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias:

1) Métodos Numéricos para EDO en $\mathbb{R}$

   a) Motivación
   b) Definiciones: EDO Lineal y Problema de Cauchy
   c) Resultados Teóricos para Problema de Cauchy
   d) Método de la Serie de Taylor
   e) Método de Euler para Problema de Cauchy
   f) Métodos de Runge-Kutta para Problema de Cauchy:
   g) Ejemplo Métodos Euler y Runge-Kutta Orden 4
   h) Métodos Multi-pasos Explícitos
   i) Sistemas de EDO y EDO de Orden Superior

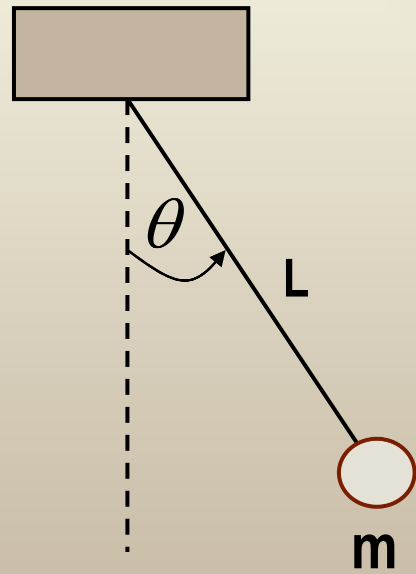
2) Bibliografía

1) MN para EDO: Motivación 1

Variación de Cantidades Continuas en el Tiempo:

Ecuación del Péndulo Simple:

Demostrar !



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} sen\theta = 0$$

$$\theta(t = 0) = \theta_0$$

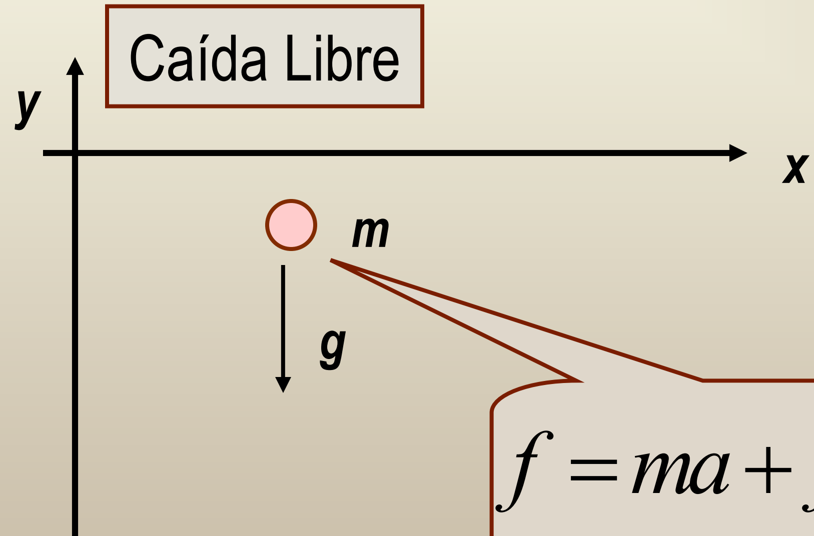
$$\theta'(t = 0) = \theta'_0$$

Propuesto: Ecuaciones del Péndulo de Foucault

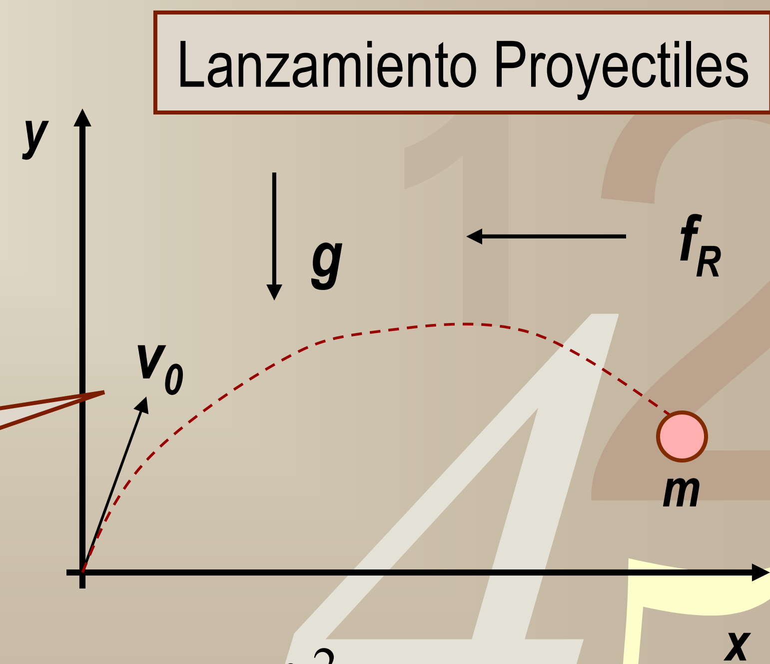
1) MN para EDO: Motivación 2

Variación de Cantidades Continuas en el Tiempo:

Trayectorias de Partículas



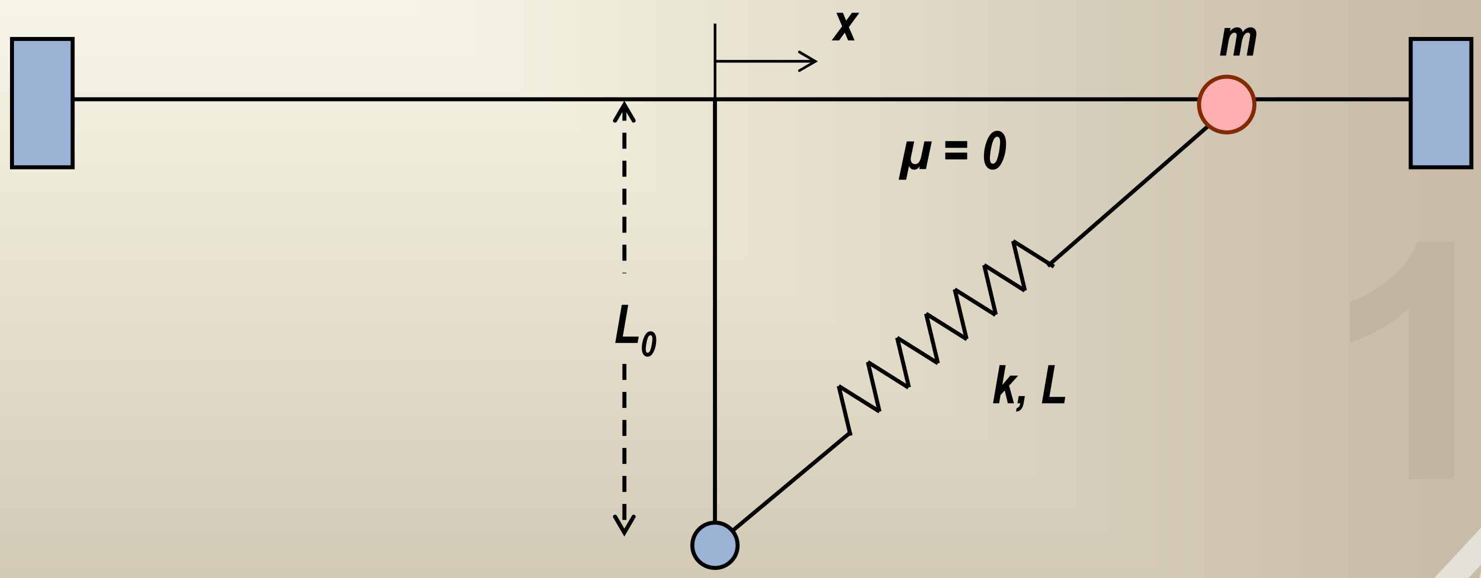
$$f = ma + f_R(v)$$



$$m\ddot{x} = -mg + f_R(\dot{x}) = -mg - c\dot{x}^2$$

1) MN para EDO: Motivación 3

Un ejemplo de dinámica de resortes:



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x\left(1-\frac{L}{\sqrt{x^2+9}}\right)$$

1) MN para EDO: Motivación 4

- Modelo de Crecimiento Logístico de una Población:

  La población $p(t)$ de EEUU en el siglo 20 crece aproximadamente según la edo no lineal logística:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha\, p(t) - \beta\, p^2(t)$$

  Donde: α=0.02 y β=0.00004. Desde 1900 se han medido los datos de la tabla en la próxima transparencia. Se puede afirmar que el modelo es adecuado ? Cuál es error entre 1900 y 1980 ?

1) MN para EDO: Motivación 4

- Modelo de Crecimiento Logístico de una Población:

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Año	Tiempo t_k	p(t) real
1900	0.0	76.1
1910	10.0	92.4
1920	20.0	106.5
1930	30.0	123.1
1940	40.0	132.6
1950	50.0	152.3
1960	60.0	180.7
1970	70.0	204.9
1980	80.0	226.5

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p(t) - \beta p^2(t)$$

$$p(t) = \frac{500}{\left(1 + \frac{4239}{761} e^{-\frac{1}{50}t}\right)} \quad \text{solución exacta}$$

$$p_{k+1} = p_k + h(\alpha p_k - \beta p_k{}^2)$$

$$p_k = p(t = t_k) \ \forall k = 0, \ldots, 8 = n$$

$$h = \frac{(T - t_0)}{n} = \frac{(1980 - 1900)}{8} = 10$$

$$t_k = hk = 10k \ \ k = 0, 1, \ldots, 8$$

1) MN para EDO: Motivación 4

- Modelo de Crecimiento Logístico de una Población:

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Año	Tiempo t_k	p(t) real	p(t) Edo	p(t) Euler	Error1	Error2
1900	0.0	76.1	76.1	76.1	0.0	0.0
1910	10.0	92.4	89.9	89.0	2.5	0.9
1920	20.0	106.5	105.6	107.5	0.9	-1.9
1930	30.0	123.1	123.2	123.3	-0.1	-0.1
1940	40.0	132.6	142.7	141.7	-10.1	1.6
1950	50.0	152.3	164.0	152.1	-11.7	11.9
1960	60.0	180.7	186.7	173.5	-6.0	13.2
1970	70.0	204.9	210.6	203.8	-5.7	6.8
1980	80.0	226.5	235.3	229.1	-8.8	6.2

1) MN para EDO: Motivación 5

- Ecuación de Duffing:

Esta edo no-lineal se utiliza para describir diferentes sistemas dinámicos (resortes, transformadores, etc). La forma más general de esta ecuación es:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \delta \frac{dx(t)}{dt} + \left(\beta x^3(t) \pm \omega_0{}^2 x(t) \right) = \gamma \cos\left(\omega t + \phi \right)$$

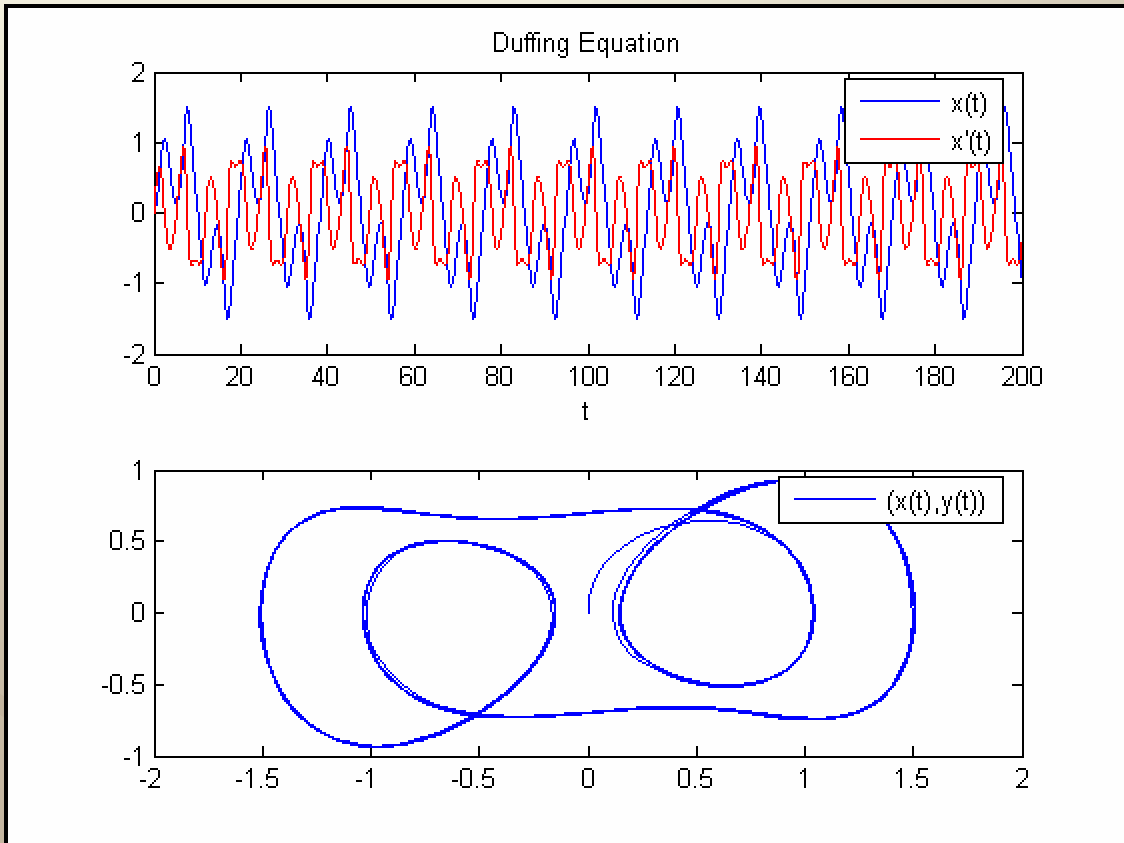
Por ejemplo, la edo del flujo magnético de un transformador tiene la forma:

$$\ddot{\phi} + b\phi^3 + \omega_0{}^2 \phi = \frac{\omega}{N} E \cos\left(\omega t \right)$$

1) MN para EDO: Motivación 5

- Ejemplo Ecuación de Duffing:

$$\ddot{x}+\delta\dot{x}+\left(\beta x^3 \pm \omega_0{}^2 x\right)=\gamma\cos\left(\omega t+\phi\right)$$



$$\delta=1, \beta=1, \omega_0=1$$

$$\gamma=1, \omega=1, \phi=0$$

Ejemplo de caos "ordenado"

1) MN para EDO: Ecuación Diferencial Lineal

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

EDO

- Lineales ⇒ Integrables
  - Según Orden
  - Coeficientes Constantes o Variables
  - Homogéneas o No

Encontrar $y = f(x)$ tal que:

$$a_n(x)y^{(n)}(x)+\cdots+a_1(x)y^{(1)}(x)+a_0(x)y(x)=g(x)$$

- No-Lineales
  - Tratamiento Analítico Caso a Caso
  - Solución Vía Método Euler o R-K

1) MN para EDO: EDO Lineal Primer Orden

$$a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=g(x)\Rightarrow y'(x)+p(x)y(x)=f(x)$$

$$y'(x)+p(x)y(x)=0\Rightarrow y^h(x)=ce^{\left(-\int p(x)dx\right)}$$

$$y'(x)+p(x)y(x)=f(x)\Rightarrow y^p(x)=g(x)e^{\left(-\int p(x)dx\right)}$$

$$y(x)=ce^{\left(-\int p(x)dx\right)}+e^{\left(-\int p(x)dx\right)}\int f(x)e^{\left(\int p(x)dx\right)}dx$$

$$y(x)=e^{\left(-\int p(x)dx\right)}\left[c+\int f(x)e^{\left(\int p(x)dx\right)}dx\right]$$

1) MN para EDO: EDO Lineal Primer Orden

Ecuación Tipo Bernoulli: $\boxed{y'(x)+p(x)y(x)=f(x)y^{\alpha}(x)}$

$\boxed{\begin{array}{l}\alpha\in\mathbb{R}\\ \alpha\neq 1\end{array}}$

Al multiplicar la edo por: $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ se obtiene:

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y'+(1-\alpha)p(x)y^{1-\alpha}=(1-\alpha)f(x)$$

$$(y^{1-\alpha})'+(1-\alpha)p(x)(y^{1-\alpha})=(1-\alpha)f(x)$$

Si se define: $u=y^{1-\alpha}$ se obtiene la edo lineal:

$$u'+(1-\alpha)p(x)u=(1-\alpha)f(x)$$

1) MN para EDO: EDO Lineal Primer Orden

Ejemplo Ecuación Tipo Bernoulli: $y' + xy = \dfrac{x}{y}$

$$2yy' + 2xy^2 = 2x \Rightarrow (y^2)' + 2xy^2 = 2x$$

Si se define: $u = y^2$ se obtiene la edo lineal:

$$u' + 2xu = 2x$$

$$u(x) = (ce^{-x^2} + 1) \Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{u} = \pm\sqrt{ce^{-x^2} + 1}$$

Ejercicios Propuestos: $y' + y = x^2 y^2, \; y' + xy = xy^2$

$$y' + x^2 y = xy^3, \left(xy^2\right)' = \left(xy\right)^3 (x^2 + 1)$$

$$(x^2 + 1) y^{\frac{1}{2}} y = xe^{\frac{3}{2}x} + (1 - x)^2 y^{\frac{1}{2}} y$$

1) MN para EDO: EDO Lineal Primer Orden

Propuesto: Ecuación Tipo Ricati:

$$\boxed{y'(x) = p(x) + q(x)y(x) + r(x)y^2(x) \quad (+)}$$

Se puede linealizar esta edo ? Sea y_1 una solución de (+)

$$y_1'(x) = p(x) + q(x)y_1(x) + r(x)y_1^2(x)$$

$$(y - y_1)' = q(x)(y - y_1) + r(x)(y^2 - y_1^2)$$

$$= q(x)(y - y_1) + r(x)(y + y_1)(y - y_1)$$

$$z' = q(x)z + r(x)z(z + 2y_1)$$

$$z' = \left(q(x) + 2r(x)y_1\right)z + r(x)z^2$$ Edo Tipo Bernoulli:

1) MN para EDO:

Problema de Cauchy o de Valor Inicial

Dada una función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en ambas variables y un punto inicial $y_0 \in \mathbb{R}$:

Encontrar una función $y:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$
\begin{aligned}
& y(t = t_0) = y_0 \\
& \frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \\
& t \in [t_0, T]
\end{aligned}
$$

Problema No-Lineal
De Primer Orden
No Homogéneo

Solución Única

1) MN para EDO:

Resultados Teóricos para Problema de Cauchy

- Se dice que una función $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisface una condición de Lipschitz en la variable y si existe L (constante de Lipschitz) con la propiedad:

$$\left|f(t,y_1) - f(t,y_2)\right| \leq L\left|y_1 - y_2\right| \quad \forall (t,y_1),(t,y_1) \in R$$

- Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto convexo. Si existe una constante L que verifica: $\left|\dfrac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right| \leq L \;\; \forall (t,y) \in R$

  entonces f satisface la condición de Lipschitz en R

1) MN para EDO:

Resultados Teóricos para Problema de Cauchy

- Teo: Sean $R = \{(t, y) / t_0 \leq t \leq T, -\infty < y < \infty\}$ y una función $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua en R. Si f satisface una condición de Lipschitz en la variable y entonces el problema de valor inicial:

$$y(t = t_0) = y_0$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \quad \forall t \in [t_0, T]$$

tiene solución única

1) MN para EDO:

Método de la Serie de Taylor para Prob. Cauchy

La solución del Problema de Cauchy se desarrolla en Serie de Taylor. Las derivadas se obtienen de la edo:

$$y(t=t_0)=y_0$$

$$\frac{dy(t)}{dt}=f(t,y(t))$$

$$t\in[t_0,T]$$

$$y(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k+Error$$

$$Error(t)=\frac{f^{(n+1)}(\xi(t))}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}$$

$$y(t_0)=y_0,y'(t_0)=y'_0=f(t_0,y_0),y''(t_0)=y''_0=\frac{df(t_0,y_0,y'_0)}{dt},\dots$$

1) MN para EDO:

Método de Euler para Problema de Cauchy

Se determinan n valores y_k de la función $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en puntos t_k equi-espaciados en $[t_0, T]$:

$$h = \frac{(T - t_0)}{n} \quad t_k = t_0 + kh \quad \forall k = 0, \ldots, n$$

$$y_0 = y(t = t_0)$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

Método Inexacto !

Error:

$$\frac{h^2}{2} y^{(2)}(\xi_i)$$

1) MN para EDO:

Método de Runge-Kutta de Orden 2 para P. Cauchy

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Mejoramos el método de Euler de la siguiente forma:

$$q^1_k = hf(t_k, y_k) \quad q^2_k = hf(t_k + \alpha h, y_k + \beta hf(t_k, y_k))$$

$$y_{k+1} = y_k + \mu_1 q^1_k + \mu_2 q^2_k$$

Tenemos que:

$$y_{k+1} = y(t_k + h) \approx y(t_k) + hy'(t_k) + \frac{h^2}{2} y''(t_k) = y(t_k) + hf(t_k, y_k) + \frac{h^2}{2} f'(t_k, y_k)$$

$$f'(t_k, y_k) = \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial y} y'(t_k) = \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial y} f(t_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y(t_k + h) \approx y(t_k) + hf(t_k, y_k) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial t} + \frac{h^2}{2} f(t_k, y_k) \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial y} \quad (1)$$

1) MN para EDO:

Método de Runge-Kutta de Orden 2 para P. Cauchy

Por otra parte:

$$y_{k+1} = y_k + \mu_1 hf(t_k, y_k) + \mu_2 hf(t_k + \alpha h, y_k + \beta hf(t_k, y_k))$$

$$f(t_k + \alpha h, y_k + \beta hf(t_k, y_k)) \approx f(t_k, y_k) + \alpha h \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial t} + \beta hf(t_k, y_k) \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial y}$$

$$y_{k+1} = y(t_k) + \mu_1 hf(t_k, y_k) + \mu_2 h\left[f(t_k, y_k) + \alpha h \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial t} + \beta hf(t_k, y_k) \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial y} \right]$$

$$y_{k+1} = y(t_k) + (\mu_1 + \mu_2)hf(t_k, y_k) + \mu_2 \alpha h^2 \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial t} + \mu_2 \beta h^2 f(t_k, y_k) \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial y} \quad 2$$

Igualando 1 y 2: $\mu_1 + \mu_2 = 1 \qquad \mu_2 \alpha = \frac{1}{2} \qquad \mu_2 \beta = \frac{1}{2}$

1) MN para EDO:

Método de Runge-Kutta de Orden 2 para P. Cauchy

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \quad (t_0, y_0) \text{ dado}$$

RK Orden 2

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ q^1{}_k = hf(t_k, y_k) \quad q^2{}_k = hf(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_k{}^1}{2}) \\ \boxed{y_{k+1} = y_k + q^2{}_k} \end{cases}$$

Error: $\boxed{O(h^3)}$

1) MN para EDO:
RK 2: Ejemplo Simple

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2 , \; y(1) = 1$$

$$y(t) = \frac{t}{1 + \ln(t)}$$

$$f(t, y) = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2 , y_0 = 1$$

$$y_k = y(t = t_k) \; k = 0, \ldots, 4 = n$$

$$h = \tfrac{(T - t_0)}{n} = \tfrac{(2-1)}{4} = 0.25$$

$$t_k = hk = 0.25k \;\; k = 0, 1, \ldots, 4$$

$$q^1{}_k = hf(t_k, y_k), q^2{}_k = hf(t_k + \tfrac{1}{2}h, y_k + \tfrac{1}{2}q^1{}_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + q^2{}_k \quad k = 0, 1, \ldots, 4$$

t	$y(t)$	k	q^1	q^2	y_k	E_{abs}	E_{rel}
1	1	0	0	0.0247	1	0	0
1.25	1.0219	1	0.03695	0.04578	1.0247	0.0028	0.0027
1.5	1.0672	2	0.05108	0.05488	1.0705	0.0033	0.0031
1.75	1.1221	3	0.05738	0.05918	1.1254	0.0033	0.0029
2	1.1812	4			1.1846	0.0034	0.0030

1) MN para EDO:

RK 2 aplicado al modelo crecimiento logístico:

$$p' = \alpha p(t) - \beta p^2(t)$$

$$f(t,p) = \alpha p - \beta p^2$$

$$\alpha = 0.02, \beta = 0.00004$$

$$p(t_0) = p_0 = 76.1$$

$$p_k = p(t = t_k) \; k = 0,\ldots,8 = n$$

$$h = \frac{(T - t_0)}{n} = \frac{(1980-1900)}{8} = 10 \Rightarrow t_k = hk = 10k \;\; k = 0,1,\ldots,8$$

$$q^1{}_k = hf(t_k, y_k), q^2{}_k = hf(t_k + \tfrac{1}{2}h, y_k + \tfrac{1}{2}q^1{}_k)$$

$$p_{k+1} = p_k + q^2{}_k \quad k = 0,1,\ldots,8$$

$$k = 0 : t_0 = 0, h = 10, p_0 = 76.1$$

$$q^1{}_0 = hf(t_0, p_0) = 12.9035, q^2{}_0 = hf(t_0 + \tfrac{h}{2}, p_0 + \tfrac{q^1{}_0}{2}) = 13.7844$$

$$p_1 = p_0 + q^2{}_0 = 89.8844$$

$$k = 1 : t_1 = 10, h = 10, p_1 = 89.8844$$

$$q^1{}_1 = hf(t_1, p_1) = 14.7452, q^2{}_1 = hf(t_1 + \tfrac{h}{2}, p_1 + \tfrac{q^1{}_1}{2}) = 15.6678$$

$$p_2 = p_2 + q^2{}_2 = 105.5523$$

1) MN para EDO:

Método de Runge-Kutta de Orden 3 para P. Cauchy

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

RK Orden 3
$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ q^1{}_k = hf(t_k, y_k) \\ q^2{}_k = hf(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_k{}^1}{2}) \\ q^3{}_k = hf(t_k + h, y_k - q^1{}_k - 2q^2{}_k) \end{cases}$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \tfrac{1}{6}(q^1{}_k + 4q^2{}_k + q^3{}_k)}$$

Error: $\boxed{O(h^4)}$

1) MN para EDO:

Método de Runge-Kutta de Orden 4 para P. Cauchy

RK Orden 4

$$\begin{cases} y_0 \ \text{dado} \\ q^1{}_k = hf(t_k, y_k) \\ q^2{}_k = hf(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q^1{}_k}{2}) \\ q^3{}_k = hf(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q^2{}_k}{2}) \\ q^4{}_k = hf(t_k + h, y_k + q^3{}_k) \end{cases}$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \tfrac{1}{6}(q^1{}_k + 2q^2{}_k + 2q^3{}_k + q^4{}_k)}$$

Error:

$$\boxed{O(h^5)}$$

1) MN para EDO:

Ejemplo Métodos Euler y Runge-Kutta Orden 4

t_k	Exacto	Euler	R-K Orden 4	Error R-K
0.0	0.5000000	0.5000000	0.5000000	0.0000000
0.1	0.6574145	0.6554982	0.6574144	0.0000001
0.2	0.8292986	0.8253385	0.8292983	0.0000003
0.3	1.0150706	1.0089334	1.0150701	0.0000005
0.4	1.2140877	1.2056345	1.2140869	0.0000008
0.5	1.4256394	1.4147264	1.4256384	0.0000010

$$y' = y - t^2 + 1 \quad t \in [0,2] \quad y(0) = \tfrac{1}{2}$$

1) MN para EDO:

Métodos Multipasos Explícitos

Un método multipaso de paso m para resolver el problema de Cauchy es de la forma:

$$y_{k+1} = a_{m-1}y_k + a_{m-2}y_{k-1} + \cdots + a_0 y_{k+1-m} + \\ + h[b_{m-1}f(t_k, y_k) + b_{m-2}f(t_{k-1}, y_{k-1}) + \cdots + b_0 f(t_{k+1-m}, y_{k+1-m})]$$

Se necesitan m valores iniciales: $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$

Los coeficientes $a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots, a_0$ y $b_{m-1}, b_{m-2}, \ldots, b_0$ son las constantes del método y: $h = \frac{(T-t_0)}{n}$ $\quad t_k = t_0 + kh \quad \forall k = 0, \ldots, n$

Por Ejemplo

$$\boxed{\begin{array}{l} y_{k+1} = y_k + h[3f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})] \\ y_0, y_1 \text{ dados} \end{array}}$$

Adams Bashforth m=2

1) MN para EDO:
Métodos Multipasos Explícitos

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- Adams – Bashforth de 3 Pasos

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}[23f(t_k, y_k) - 16f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 5f(t_{k-2}, y_{k-2})]$$

y_0, y_1, y_2 dados

$$Error(k+1) = \frac{3}{8} y^{(4)}(\mu_{k+1}) h^3 \quad \mu_{k+1} \in [t_{k-2}, t_{k+1}]$$

- Adams – Bashforth de 4 Pasos

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}[55f(t_k, y_k) - 59f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 37f(t_{k-2}, y_{k-2}) - 9f(t_{k-3}, y_{k-3})]$$

y_0, y_1, y_2, y_3 dados

$$Error(k+1) = \frac{251}{720} y^{(5)}(\mu_{k+1}) h^4 \quad \mu_{k+1} \in [t_{k-3}, t_{k+1}]$$

1) MN para EDO:

Sistemas de Edo

Un sistema de primer orden (condiciones iniciales) de edo no-lineales es de la forma:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}\right\} \quad (+) \quad
\begin{aligned}
x_1(t=0) &= x_1^{\,0} \\
x_2(t=0) &= x_2^{\,0} \\
&\vdots \\
x_n(t=0) &= x_n^{\,0}
\end{aligned}
$$

$$\forall t \in [0, T]$$

1) MN para EDO:

Sistemas de Edo

- Teorema: Supongamos que las funciones $f_i(\cdot)$ son continuas y satisfacen la condición de Lipschitz en D:

$$\left|f_i(t,u_1,u_2,\ldots,u_n)-f_i(t,v_1,v_2,\ldots,v_n)\right|\le L\sum_{j=1}^{n}\left|u_j-v_j\right|$$

$$\forall u=(t,u_1,u_2,\ldots,u_n), v=(t,v_1,v_2,\ldots,v_n)\in D$$

$$D=\left\{(t,z_1,z_2,\ldots,z_n)\middle|0\le t\le T,-\infty<z_j<\infty\,\forall j=1,\ldots,n\right\}$$

Entonces el sistema de edo no-lineales (+) tiene solución única. La condición de Lipschitz se satisface si:

$$\left|\frac{\partial f_i(t,u_1,u_2,\ldots,u_n)}{\partial u_j}\right|\le L\ \forall(t,u_1,u_2,\ldots,u_n)\in D+f_i\in C^1$$

1) MN para EDO:
Sistemas de Edo: Método de Euler

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$$h = \frac{T}{n},\ t_k = kh\ \forall k = 0,1,\ldots,n$$

$x_{ik} = x_i(t_k)$ Aproximación de Runge-Kutta

$x_{10} = x_1(0),\ldots,x_{n0} = x_n(0)$ Condiciones iniciales

$$x_{1k}, x_{2k},\ldots,x_{nk} \Rightarrow x_{1,k+1}, x_{2,k+1},\ldots,x_{n,k+1}\quad \forall i = 1,\ldots,n, \forall k \geq 0$$

$$x_{i,k+1} = x_{ik} + hf_i(t_k, x_{1k}, x_{2k},\ldots,x_{nk})\ \forall i = 1,\ldots,n, \forall k \geq 0$$

1) MN para EDO:
Sistemas de Edo: Runge – Kutta de Orden 2

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$$h=\frac{T}{n},\ t_k=kh\ \forall k=0,1,\dots,n$$

$$x_{ik}=x_i(t_k) \text{ Aproximación de Runge-Kutta}$$

$$x_{10}=x_1(0),\dots,x_{n0}=x_n(0) \text{ Condiciones iniciales}$$

$$x_{1k},x_{2k},\dots,x_{nk}\Rightarrow x_{1,k+1},x_{2,k+1},\dots,x_{n,k+1}\ \ \forall i=1,\dots,n,\forall k\geq 0$$

$$q^1{}_{ik}=hf_i(t_k,x_{1k},x_{2k},\dots,x_{nk})\ \forall i=1,\dots,n,\forall k\geq 0$$

$$q^2{}_{ik}=hf_i(t_k+\tfrac{h}{2},x_{1k}+\tfrac{1}{2}q^1{}_{1k},x_{2k}+\tfrac{1}{2}q^1{}_{2k},\dots,x_{nk}+\tfrac{1}{2}q^1{}_{nk})$$

$$x_{i,k+1}=x_{ik}+q^2{}_{ik}\ \ \forall i=1,\dots,n,\forall k\geq 0$$

1) MN para EDO:

Sistemas de Edo: Ejemplo RK 2

El modelo de Lotka - Volterra predice la evolución en el tiempo de una población con 2 especies, una depredadora $x_1(t)$ y la otra presa $x_2(t)$. Se supone que la población presa tiene suficiente comida y que su natalidad es proporcional a la cantidad de presas vivas: $k_1x_1(t)$. La mortalidad de la población presa depende del número de presas y depredadores: $k_2x_1(t)x_2(t)$. La natalidad de la población depredador es: $k_3x_1(t)x_2(t)$ y su mortalidad es: $k_4x_2(t)$. Se expresa el cambio en la poblaciones presa y depredador mediante el sedo:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = k_1x_1(t) - k_2x_1(t)x_2(t) \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = k_3x_1(t)x_2(t) - k_4x_2(t) \quad t = 1,\dots,4$$

$$x_1(1) = 1000, x_2(t=1) = 500 \quad k_1 = 3, k_2 = 0.002, k_3 = 0.0006, k_4 = 0.5$$

1) MN para EDO:
Sistemas de Edo: Ejemplo RK 2

En la iteración k de RK 2 aplicada a este sedo, hay que calcular primero: $q^1{}_{1k}, q^1{}_{2k}$ luego $q^2{}_{1k}, q^2{}_{2k}$ y luego $x_{1,k+1}, x_{2,k+1}$

$$t \in [0,4], n = 4, h = \tfrac{T}{n} = 1,\ t_k = k, k = 0,1,\ldots,4$$

$$x_{1k} = x_1(t_k), x_{2k} = x_2(t_k) \text{ Aprox. RK} \quad x_{10} = x_1(0), x_{20} = x_2(0) \text{ c. i.}$$

$$x_{1k}, x_{2k} \Rightarrow x_{1,k+1}, x_{2,k+1}, k = 0,1,2,3 \text{ donde } \quad x_{i,k+1} = x_{ik} + q^2{}_{ik}$$

$$q^1{}_{1k} = hf_1(t_k, x_{1k}, x_{2k}), q^1{}_{2k} = hf_2(t_k, x_{1k}, x_{2k})$$

$$q^2{}_{1k} = hf_1(t_k + \tfrac{h}{2}, x_{1k} + \tfrac{1}{2}q_{1k}{}^1, x_{2k} + \tfrac{1}{2}q_{2k}{}^1)$$

$$q^2{}_{2k} = hf_2(t_k + \tfrac{h}{2}, x_{1k} + \tfrac{1}{2}q_{1k}{}^1, x_{2k} + \tfrac{1}{2}q_{2k}{}^1)$$

1) MN para EDO:

Sistemas de Edo: Ejemplo RK 2

$$\boxed{f_1(t,x_1,x_2)=k_1x_1-k_2x_1x_2,\ f_2(t,x_1,x_2)=k_3x_1x_2-k_4x_2}$$

Iteración 0: $k=0, t_0=0, h=1, x_{10}=1000, x_{20}=500$

$$q^1{}_{10}=hf_1(x_{10},x_{20})=k_1x_{10}-k_2x_{10}x_{20}=2000$$

$$q^1{}_{20}=hf_2(x_{10},x_{20})=k_3x_{10}x_{20}-k_4x_{20}=50$$

$$q^2{}_{10}=hf_1(x_{10}+\tfrac{1}{2}q^1{}_{10},x_{20}+\tfrac{1}{2}q^1{}_{20})=3900$$

$$q^2{}_{20}=hf_2(x_{10}+\tfrac{1}{2}q^1{}_{10},x_{20}+\tfrac{1}{2}q^1{}_{20})=367.5$$

$$x_{11}=x_{10}+q^2{}_{10}=4900$$

$x_{21}=x_{20}+q^2{}_{20}=867.5$ Y así sigue para $\begin{cases} k=1, t_0=1, h=1 \\ x_{11}=4900, x_{21}=867.5 \end{cases}$

1) MN para EDO:

Sistemas de Edo: Runge – Kutta de Orden 3

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$$h = \frac{T}{n},\ t_k = kh\ \forall k = 0,1,\ldots,n$$

$$x_{ik} = x_i(t_k) \text{ Aproximación Runge-Kutta}$$

$$x_{10} = x_1(0),\ldots,x_{n0} = x_n(0) \text{ Condiciones iniciales}$$

$$x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk} \Rightarrow x_{1,k+1}, x_{2,k+1}, \ldots, x_{n,k+1}$$

$$q^1_{ik} = hf_i(t_k, x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk})\ i = 1,\ldots,n$$

$$q^2_{ik} = hf_i(t_k + \tfrac{h}{2}, x_{1k} + \tfrac{1}{2}q^1_{1k}, x_{2k} + \tfrac{1}{2}q^1_{2k}, \ldots, x_{nk} + \tfrac{1}{2}q^1_{nk})\ i = 1,\ldots,n$$

$$q^3_{ik} = hf_i(t_k + h, x_{1k} - q^1_{1k} - 2q^2_{1k}, x_{2k} - q^1_{2k} - 2q^2_{2k}, \ldots, x_{nk} - q^1_{nk} - 2q^2_{nk})$$

$$x_{i,k+1} = x_{ik} + \tfrac{1}{6}\left(q^1_{ik} + 4q^2_{ik} + q^3_{ik}\right)\ \forall i = 1,\ldots,n, \forall k \geq 0$$

1) MN para EDO:
Sistemas de Edo: Runge – Kutta de Orden 4

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$$h = \tfrac{T}{n},\ t_k = kh\ \forall k = 0,1,\ldots,n$$

$$x_{ik} = x_i(t_k) \text{ Aproximación de Runge-Kutta}$$

$$x_{10} = x_1(0),\ldots,x_{n0} = x_n(0)\quad x_{1k}, x_{2k},\ldots,x_{nk} \Rightarrow x_{1,k+1}, x_{2,k+1},\ldots,x_{n,k+1}$$

$$q^1{}_{ik} = hf_i(t_k, x_{1k}, x_{2k},\ldots,x_{nk})\ i = 1,\ldots,n$$

$$q^2{}_{ik} = hf_i(t_k + \tfrac{h}{2}, x_{1k} + \tfrac{1}{2}q^1{}_{1k}, x_{2k} + \tfrac{1}{2}q^1{}_{2k},\ldots,x_{nk} + \tfrac{1}{2}q^1{}_{nk})\ i = 1,\ldots,n$$

$$q^3{}_{ik} = hf_i(t_k + \tfrac{h}{2}, x_{1k} + \tfrac{1}{2}q^2{}_{1k}, x_{2k} + \tfrac{1}{2}q^2{}_{2k},\ldots,x_{nk} + \tfrac{1}{2}q^2{}_{nk})\ i = 1,\ldots,n$$

$$q^4{}_{ik} = hf_i(t_k + h, x_{1k} + q^3{}_{1k}, x_{2k} + q^3{}_{2k},\ldots,x_{nk} + q^3{}_{nk})\ i = 1,\ldots,n$$

$$x_{i,k+1} = x_{ik} + \tfrac{1}{6}\left(q^1{}_{ik} + 2q^2{}_{ik} + 2q^3{}_{ik} + q^4{}_{ik}\right)\ \forall i = 1,\ldots,n, \forall k \geq 0$$

1) MN para EDO:

Edo de Orden Superior

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \quad \forall t \in [0, T]$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$$

$$\boxed{x_1(t) \doteq y(t), x_2(t) \doteq y'(t), \dots, x_n(t) \doteq y^{(n-1)}(t)} \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\frac{dx_1}{dt} = y' = x_2 \qquad\qquad x_1(t=0) = x_1^{\,0} \doteq y_0$$

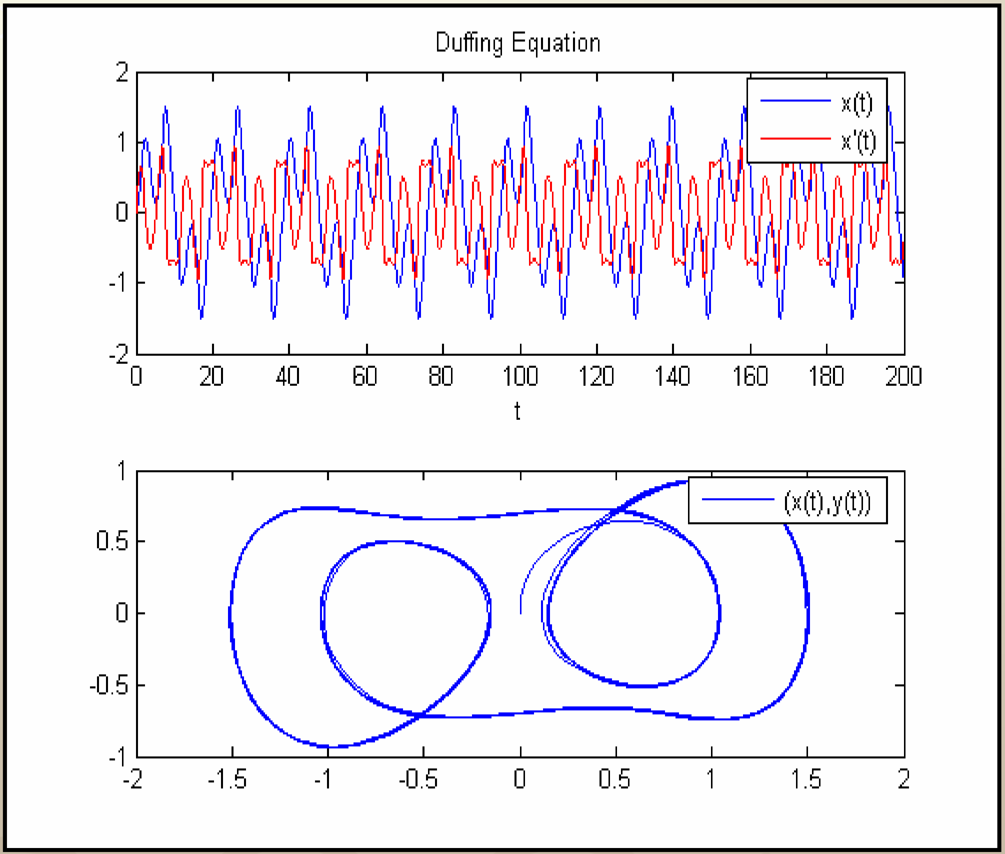
$$\frac{dx_2}{dt} = y'' = x_3 \qquad (+) \qquad x_2(t=0) = x_2^{\,0} \doteq y_0'$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x_n(t=0) = x_n^{\,0} \doteq y_0^{(n-1)}$$

$$\frac{dx_n}{dt} = y^{(n)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) = f\left(t, x_1, x_2, \dots, x_n\right)$$

1) MN para EDO:
Edo de Orden Superior: Ecuación de Duffing



$$x'' + x' + \left(x^3 - x\right) = \cos(t)$$

$$\boxed{x_1 \doteq x, x_2 \doteq x'}$$

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = -x_2 + x_1 - x_1^3 + \cos(t)$$

2) Bibliografía

1) R. Burden & J. D. Faires, Análisis Numérico, Séptima Edición, Thomson Learning, 2002.
2) C. Gerald & P. O. Wheatley, Applied Numerical Analysis 7th Edition, Pearson – Addison Wesley, 2004.
3) G. Hernández O.: Apuntes de Cálculo Numérico