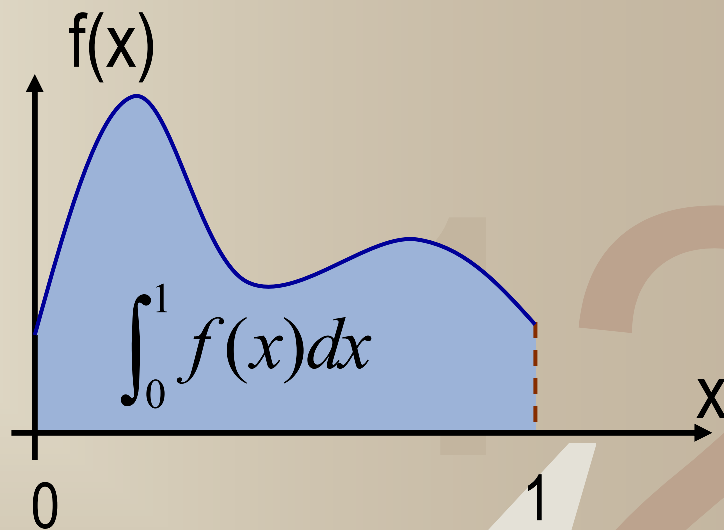
Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Matemática

Diferenciación
Integración de Funciones



MA-33A Calculo Numérico

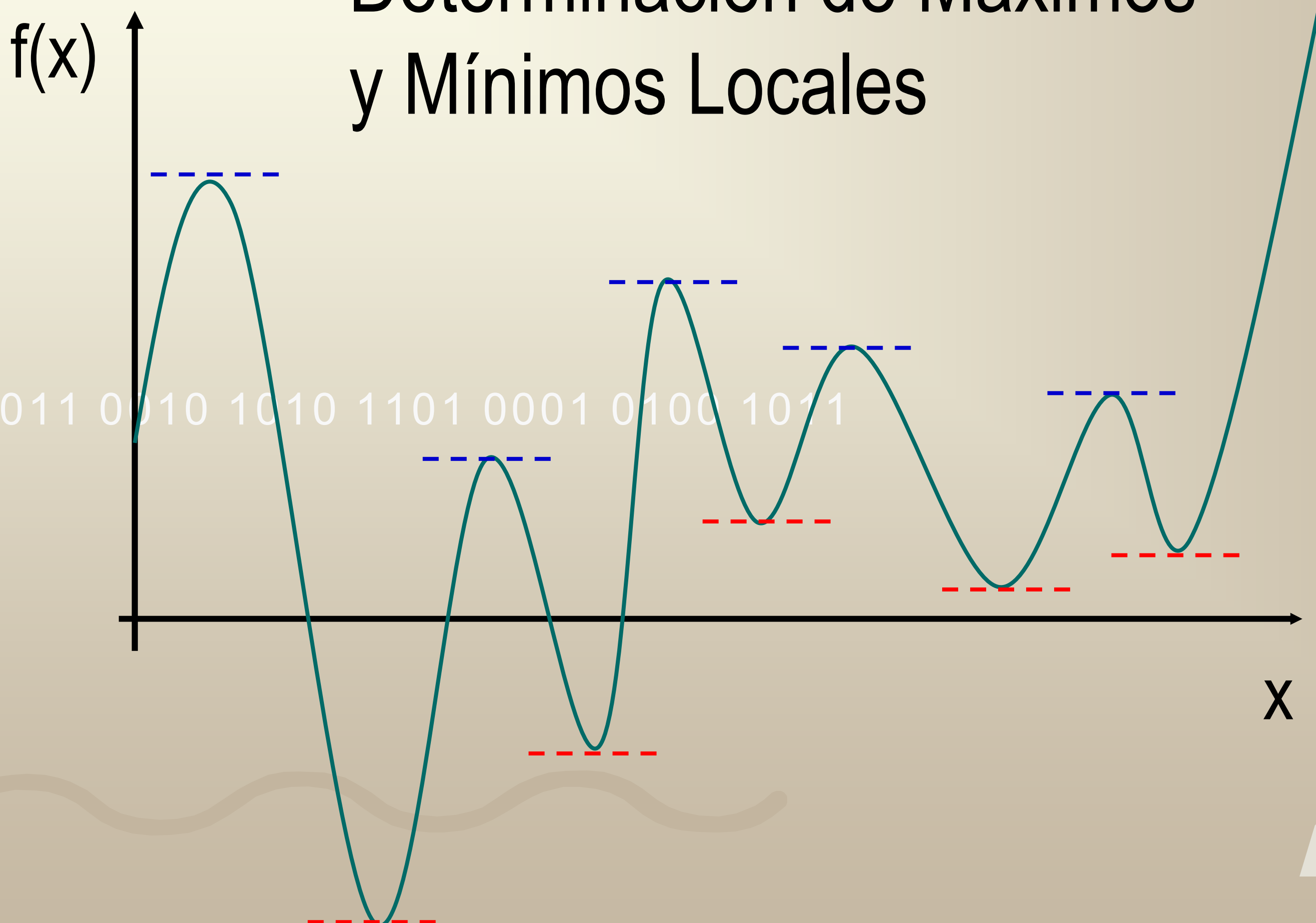
Gonzalo Hernández Oliva

Diferenciación e Integración:

1) Métodos Numéricos para Diferenciación en $\mathbb{R}$
   a) Motivación
   b) Diferenciación de Primer y Segundo Orden
2) Métodos Numéricos para Integración en $\mathbb{R}$
   a) Motivación y Definiciones
   b) Cuadratura Newton-Cotes y Fórmulas Compuestas.
   c) Métodos Adaptativos de Cuadratura
   d) Integración Impropia y Múltiple
   e) Cuadratura de Gauss
3) Bibliografía

1) MN para Diferenciación en $\mathbb{R}$: Motivación

Determinación de Máximos
y Mínimos Locales



$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f''(x) > 0 \end{array}\right\} \text{Min}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f''(x) < 0 \end{array}\right\} \text{Max}$$

1) MN para Diferenciación en $\mathbb{R}$:

Dada una función f: $\Re \to \Re$ diferenciable:

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\eta) \qquad \eta \in \left[x_0, x_0+h\right]$$

Fórmula de los Tres Puntos:

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\eta)$$

$$\eta \in \left[x_0 - h, x_0 + h\right]$$

1) MN para Diferenciación en $\mathbb{R}$:

Fórmula de los 5 puntos:

$$\frac{df(x_0)}{dx} \cong \frac{f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)}{12h}$$

$$\text{Error} = \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\eta) \qquad \eta \in \left[x_0-2h, x_0+2h\right]$$

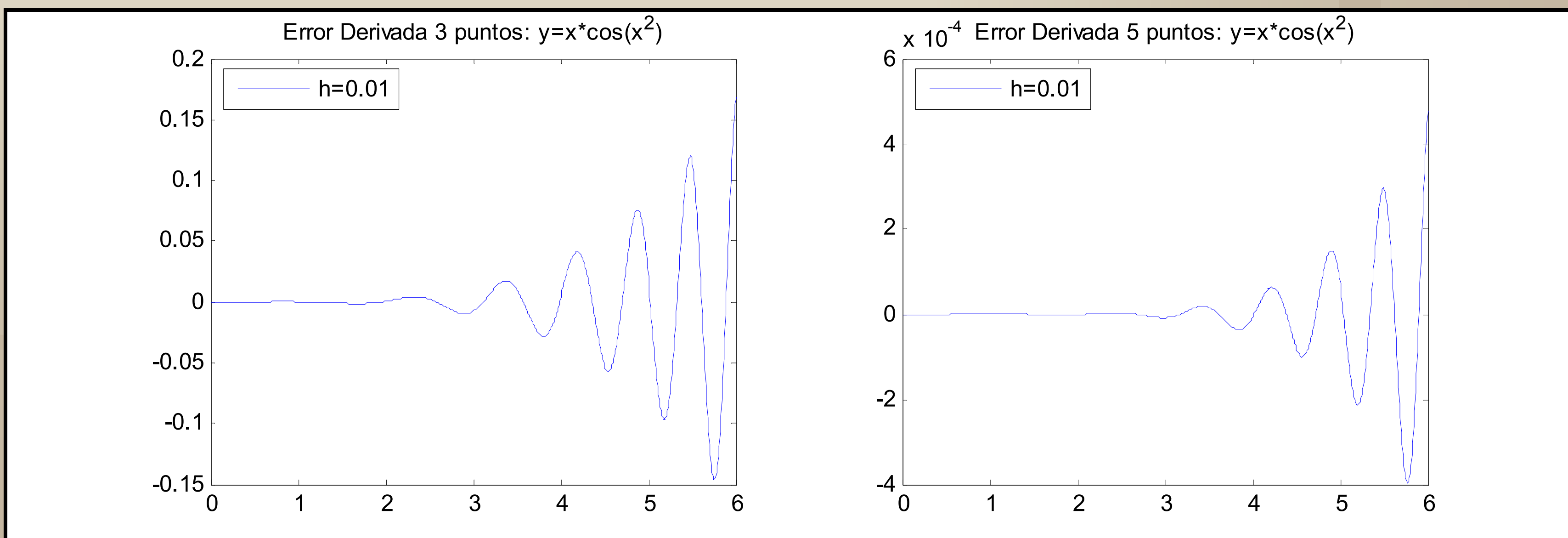
Esta fórmula es de gran exactitud !!!

1) MN para Diferenciación en $\mathbb{R}$:

Ejemplo Fórmula de los 3 y 5 puntos:

$$\left.\frac{d\cos(x^2)}{dx}\right|_{x_0} = \frac{\cos((x_0+h)^2)-\cos((x_0-h)^2)}{2h}$$

$$\left.\frac{d\cos(x^2)}{dx}\right|_{x_0} \cong \frac{\cos((x_0-2h)^2)-8\cos((x_0-h)^2)+8\cos((x_0+h)^2)-\cos((x_0+2h)^2)}{12h}$$



1) MN para Diferenciación en $\mathbb{R}$:

- Fórmula de los (n+1) puntos: Se obtiene derivando el polinomio de Lagrange. Sean:

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$$f \in \zeta^{n+1}(I), x_0, x_1, \ldots, x_n \in I \quad \text{(n+1) puntos distintos}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{n,k}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \quad \xi(x) \in [x_0, x_n]$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{dL_{n,k}(x)}{dx} + \frac{d}{dx}\left[\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\right] \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left[\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\right] \frac{df^{(n+1)}(\xi(x))}{dx} \qquad \xi(x) \in [x_0, x_n]$$

1) MN para Diferenciación en $\mathbb{R}$:

- Fórmula de los (n+1) puntos

$$\frac{df(x_j)}{dx} = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{dL_{n,k}(x_j)}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\right)_{x=x_j} \frac{f^{(n+1)}(\xi(x_j))}{(n+1)!}$$

$$\xi(x_j) \in [x_0, x_n]$$

$$\frac{d}{dx}\left(\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\right) = \frac{d}{dx}\left[(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\right]$$

$$= (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) +$$

$$+(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n) + \ldots$$

$$\ldots + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

1) MN para Diferenciación en $\mathbb{R}$:

- Fórmula de los (n+1) puntos $\xi(x_j) \in [x_0, x_n]$

$$\frac{df(x_j)}{dx} = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{dL_{n,k}(x_j)}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right)_{x=x_j} \frac{f^{(n+1)}(\xi(x_j))}{(n+1)!}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right) = (x_j - x_0)(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)$$

$$= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (x_j - x_k)$$

$$\boxed{\frac{df(x_j)}{dx} = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{dL_{n,k}(x_j)}{dx} + \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (x_j - x_k) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x_j))}{(n+1)!}}$$

1) MN para Diferenciación en $\mathbb{R}$:

- Fórmula de los 3 puntos: $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$$\frac{df(x_j)}{dx} = \sum_{k=0}^{2} f(x_k)\frac{dL_{2,k}(x_j)}{dx} + \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{2}\left(x_j - x_k\right)\frac{f^{(2+1)}(\xi(x_j))}{(2+1)!}$$

$$L_{2,0}(x) = \frac{\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}{\left(x_0-x_1\right)\left(x_0-x_2\right)} \Rightarrow L'_{2,0}(x) = \frac{2x-x_1-x_2}{\left(x_0-x_1\right)\left(x_0-x_2\right)}$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{\left(x-x_0\right)\left(x-x_2\right)}{\left(x_1-x_0\right)\left(x_1-x_2\right)} \Rightarrow L'_{2,1}(x) = \frac{2x-x_0-x_2}{\left(x_1-x_0\right)\left(x_1-x_2\right)}$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)}{\left(x_2-x_0\right)\left(x_2-x_1\right)} \Rightarrow L'_{2,2}(x) = \frac{2x-x_0-x_1}{\left(x_2-x_0\right)\left(x_2-x_1\right)}$$

1) MN para Diferenciación en $\mathbb{R}$:

- Fórmula de los 3 puntos: $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$

$$\frac{df(x_j)}{dx} = \sum_{k=0}^{2} f(x_k)\frac{dL_{2,k}(x_j)}{dx} + \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{2}\left(x_j - x_k\right)\frac{f^{(2+1)}(\xi(x_j))}{(2+1)!}$$

$$L'_{2,0}(x_0) = \frac{-3}{2h} \qquad L'_{2,1}(x_0) = \frac{2}{h} \qquad L'_{2,2}(x_0) = \frac{-1}{2h}$$

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{1}{h}\left(-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_1) - \frac{1}{2}f(x_2)\right) + \frac{f^{(3)}(\xi(x_0))}{3}h^2$$

$$L'_{2,0}(x_1) = \frac{-1}{2h} \qquad L'_{2,1}(x_1) = 0 \qquad L'_{2,2}(x_1) = \frac{1}{2h}$$

$$\frac{df(x_1)}{dx} = \frac{1}{h}\left(-\frac{1}{2}f(x_0) + 0\times f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)\right) - \frac{f^{(3)}(\xi(x_1))}{6}h^2$$

1) MN para Diferenciación en $\mathbb{R}$:

- Fórmulas para la Segunda Derivada: $\xi \in [x_0 - h, x_0 + h]$

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

- Demostración mediante Desarrollo de Taylor:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + f^{(3)}(x_0)\frac{h^3}{6} + f^{(4)}\left(\xi(x_1)\right)\frac{h^4}{24}$$

$$x_0 < \xi(x_1) < x_0 + h$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} - f^{(3)}(x_0)\frac{h^3}{6} + f^{(4)}\left(\xi(x_{-1})\right)\frac{h^4}{24}$$

$$x_0 - h < \xi(x_{-1}) < x_0$$

1) MN para Diferenciación en $\mathbb{R}$:

- Fórmulas para Derivadas de Orden Superior: Sean

$$f_{-2} = f(x_0 - 2h),\, f_{-1} = f(x_0 - h)$$

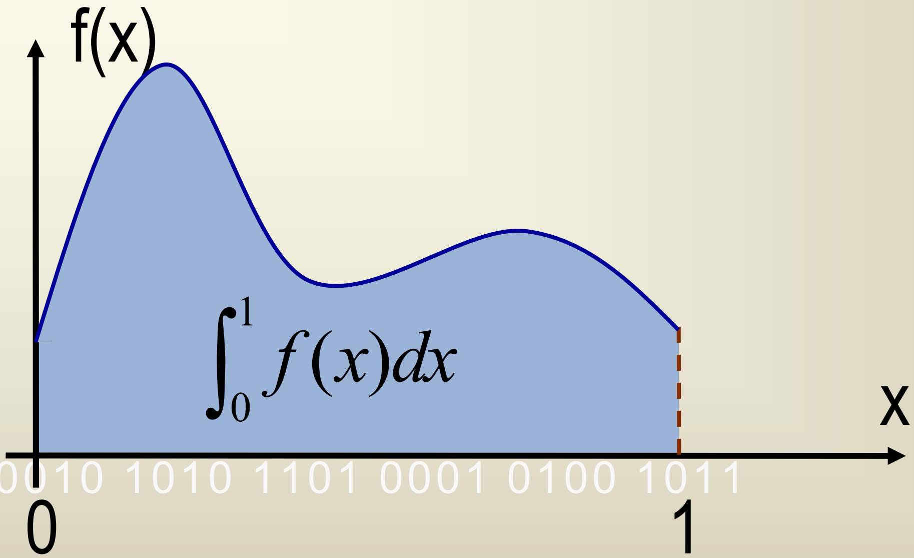
$$f_0 = f(x_0),\, f_1 = f(x_0 + h),\, f_2 = f(x_0 + 2h)$$

$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} = \frac{-f_2 + 16 f_1 - 30 f_0 + 16 f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} + O\left(h^4\right)$$

$$\frac{d^3 f(x_0)}{dx^3} = \frac{f_2 - 2 f_1 + 2 f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} + O\left(h^2\right)$$

$$\frac{d^4 f(x_0)}{dx^4} = \frac{f_2 - 4 f_1 + 6 f_0 - 4 f_{-1} + f_{-2}}{12h^2} + O\left(h^2\right)$$

2) MN para Integración en $\mathbb{R}$: Motivación



Medida e Integración: $\mu(A)$

- Longitud Curvas
- Áreas Planas
- Volumen y Superficies
- Solución EDO
- Ecuaciones Integrales

2) MN para Integración en $\mathbb{R}$: Definiciones

Las cuadraturas de Newton – Cotes suponen que:

1) Para una secuencia de puntos equi-espaciados

$$\boxed{x_k = a + k\frac{(b-a)}{n} \quad \forall k = 0,1,\ldots,n}$$

2) Se conocen los valores de una función f :

$$\boxed{f_k \doteq f(x_k)}$$

3) Se utilizarán fórmulas de cuadratura:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} c_k f_k}$$

2) MN para Integración en $\mathbb{R}$: Definiciones

4) Bajo los supuestos anteriores, se aproxima $\int_a^b f(x)dx$ mediante la integral del polinomio de Lagrange:

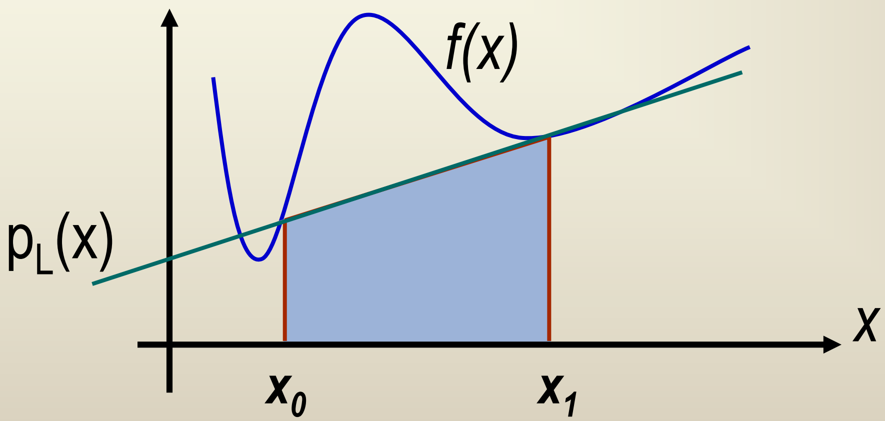
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_L(x)dx = \int_a^b \left[\sum_{k=0}^{n} f_k L_{n,k}(x)\right]dx = \sum_{k=0}^{n} f_k \int_a^b L_{n,k}(x)dx$$

Cuadratura de Newton-Cotes $\longleftarrow$ $\boxed{c_k = \int_a^b L_{n,k}(x)dx}$

$$Error = \int_a^b R_L(x)dx = \int_a^b \left[\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\right]dx$$

2) MN para Integración en $\mathbb{R}$:

- Regla del Trapecio:



Resulta al integrar el polinomio de Lagrange de primer grado sobre el intervalo $[x_0,x_1]$

Error

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right] - \frac{h^3}{12} f''(\eta)$$

$$h = (x_1 - x_0) \quad \eta \in (x_0, x_1)$$

2) MN para Integración en $\mathbb{R}$:

- Regla del Trapecio:

Resulta de calcular la integral de la aproximación lineal de la función mediante Polinomios de Lagrange

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \cong \int_{x_0}^{x_1} p_L(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) \right] dx$$

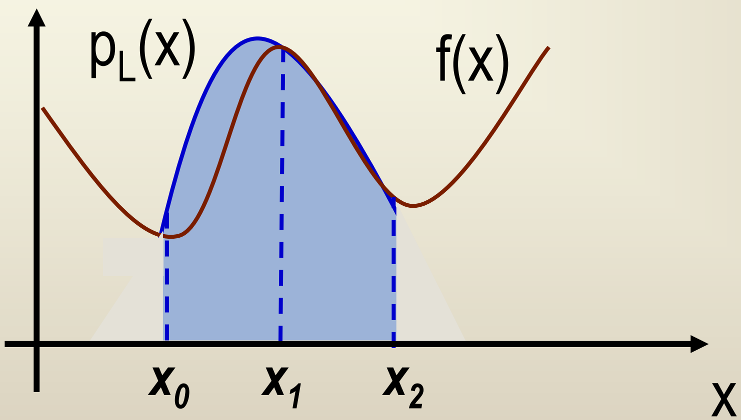
$$= f(x_0)\int_{x_0}^{x_1} L_0(x)dx + f(x_1)\int_{x_0}^{x_1} L_1(x)dx \qquad h = \left(x_1 - x_0\right)$$

$$\downarrow$$

$$= f(x_0)\left.\frac{(x-x_1)^2}{2(x_0-x_1)}\right|_{x_0}^{x_1} + f(x_1)\left.\frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)}\right|_{x_0}^{x_1} = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1) \right]$$

2) MN para Integración en $\mathbb{R}$:

- Regla de Simpson:



Resulta al integrar el polinomio de Lagrange de segundo grado sobre el intervalo $[x_0,x_2]$

(Demostración Taylor)

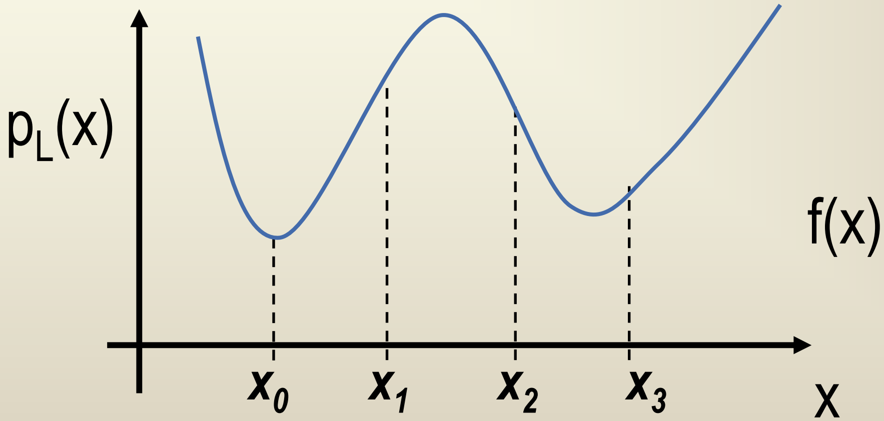
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta)$$

$$h=(x_1-x_0) \quad \eta\in\left(x_0,x_2\right)$$

Error

2) MN para Integración en $\mathbb{R}$:

- Regla de Simpson de Tres Octavos:



Resulta al integrar el polinomio de Lagrange de Tercer Grado sobre el intervalo $[x_0,x_3]$

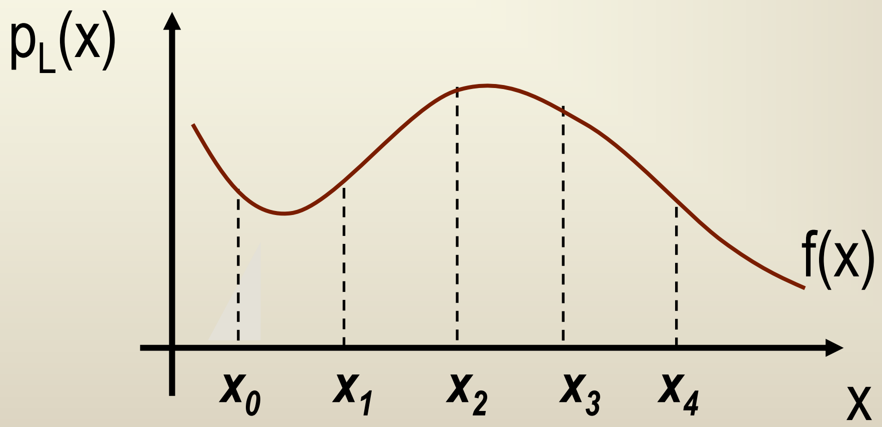
$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right]-\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\eta)$$

$$h=(x_1-x_0) \quad \eta\in\left(x_0,x_3\right)$$

Error

2) MN para Integración en $\mathbb{R}$:

- Regla de Simpson de Cinco Puntos:



Resulta al integrar el polinomio de Lagrange de Cuarto Grado sobre el intervalo $[x_0,x_4]$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}\left[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)\right]-\frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\eta)$$

$$h=(x_1-x_0) \quad \eta\in\left(x_0,x_4\right)$$

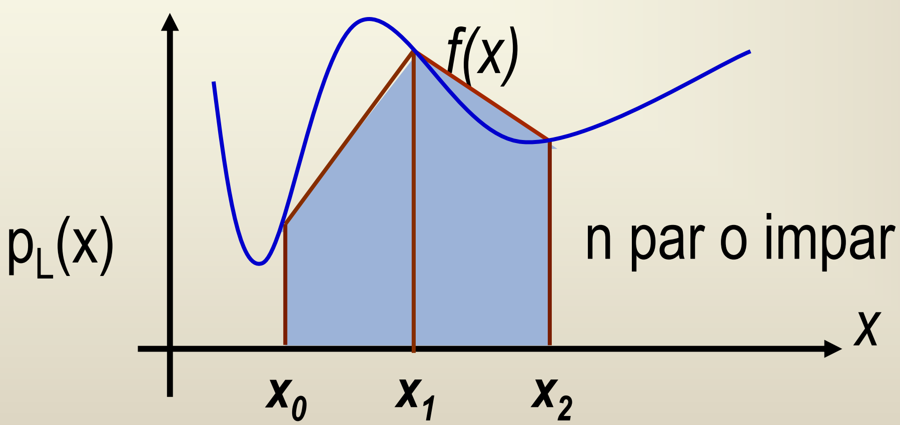
Error

2) MN para Integración en $\mathbb{R}$: Ejemplos

	$\int_0^1 e^{-x^2} dx$	$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$	$\int_0^{1/2} \sin(\pi x^2) dx$
Valor Exacto	0.74682413	0.34657359	0.12524415
Trapecio	0.68393972	0.25	0.17677670
Simpson	0.74718043	0.35	0.12395567
Simpson 3 Octavos	0.74699232	0.34807692	0.12466465
Simpson 5 Puntos	0.74683371	0.34654902	0.12523756

2) MN para Integración en $\mathbb{R}$:

- Regla del Trapecio Compuesta:



Se divide el intervalo sobre el cual se integrará en varios subintervalos de igual ancho. En cada subintervalo se aplica la Regla del Trapecio

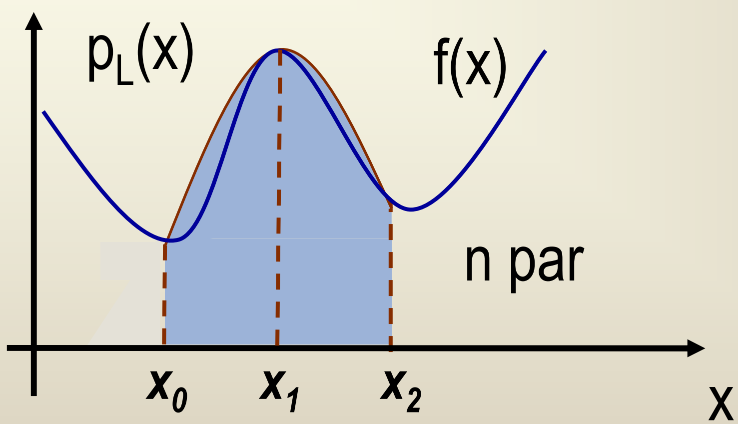
$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt \cong \sum_{k=1}^{n} \tfrac{h}{2}[f(x_{k-1}) + f(x_k)]$$

$$= \tfrac{h}{2}[f(x_0) + f(x_n)] + h\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \qquad E = -\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\mu)$$

$$h = \frac{(b-a)}{n} \qquad \mu \in (a,b)$$

2) MN para Integración en $\mathbb{R}$:

- Regla de Simpson Compuesta:



Se divide el intervalo sobre el cual se integrará en n (par) subintervalos de igual ancho. En cada subintervalo se aplica la Regla de Simpson

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(t)dt \cong \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{h}{3}[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})]$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_n)] + \frac{h}{3}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}[2f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1})]$$

$$E = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\mu) \quad \mu \in (a,b) \qquad h = \frac{(b-a)}{n}$$

2) MN para Integración en $\mathbb{R}$:

Algunos Ejemplos: Integración Compuesta

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$n = 8$	$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$	$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$	$\int_0^{1/2} \sin(\pi x^2)\,dx$
Valor Exacto	0.74682413	0.34657359	0.12524415
Trapecio Compuesto	0.74586561	0.34264290	0.12596862
Simpson Compuesto	0.74682612	0.34658409	0.12523873

2) MN para Integración en $\mathbb{R}$:

Métodos Adaptivos de Cuadratura

- En las fórmulas compuestas se utilizan puntos equidistantes, lo que no es adecuado para funciones de alta variabilidad, por ejemplo: $f(x) = \cos(x^2)$
- Un método eficiente de integración debe predecir el grado de variación de la función y adaptar el paso.
- A continuación modificaremos el método de Simpson compuesto para considerar paso adaptivos.
- Supongamos que se quiere aproximar $\int_a^b f(x)dx$ con tolerancia $\varepsilon > 0$.

2) MN para Integración en $\mathbb{R}$:

Métodos Adaptivos de Cuadratura

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

1) Aproximar $\int_a^b f(x)dx$ vía Simpson con paso: $h \doteq \frac{(b-a)}{2}$

$$\int_a^b f(x)dx = S(a,b) - \tfrac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu) = \tfrac{h}{3}\left[f(a) + 4f(a+h) + f(b)\right] - \tfrac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu)$$

2) Estimar exactitud de $S(a,b)$ utilizando Simpson con paso $\frac{h}{2}$

$$\int_a^b f(x)dx = S\left(a, \tfrac{a+b}{2}\right) + S\left(\tfrac{a+b}{2}, b\right) - \tfrac{1}{16}\left(\tfrac{h^5}{90}\right) f^{(4)}(\tilde{\mu})$$

Si $f^{(4)}(\mu) \approx f^{(4)}(\tilde{\mu})$ entonces igualando: $I = \int_a^b f(x)dx$

$\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu) \approx \frac{16}{15}\left[S(a,b) - S\left(a, \tfrac{a+b}{2}\right) - S\left(\tfrac{a+b}{2}, b\right)\right]$ y se tiene que:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S\left(a, \tfrac{a+b}{2}\right) + S\left(\tfrac{a+b}{2}, b\right)\right| \approx \tfrac{1}{15}\left|S(a,b) - S\left(a, \tfrac{a+b}{2}\right) - S\left(\tfrac{a+b}{2}, b\right)\right|$$

2) MN para Integración en $\mathbb{R}$:

Métodos Adaptivos de Cuadratura

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Luego, si:

$$\frac{1}{15}\left|S(a,b)-S\left(a,\tfrac{a+b}{2}\right)-S\left(\tfrac{a+b}{2},b\right)\right|\le\varepsilon\Rightarrow\left|I-S\left(a,\tfrac{a+b}{2}\right)-S\left(\tfrac{a+b}{2},b\right)\right|\le\varepsilon$$

Y se hace la aproximación: $I\approx S\left(a,\tfrac{a+b}{2}\right)+S\left(\tfrac{a+b}{2},b\right)$

Sino, ir a 3).

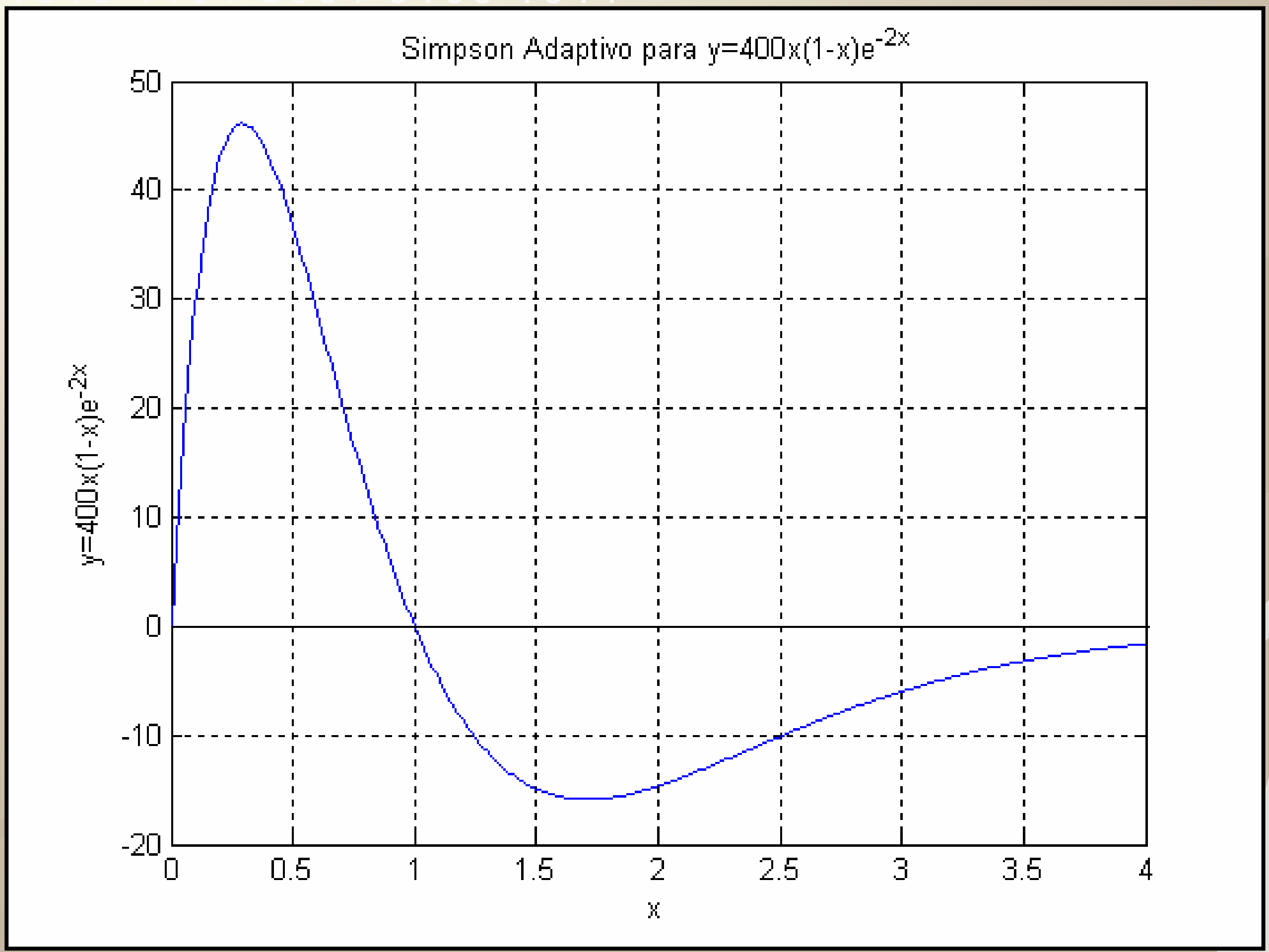
3) Volver a 1) con paso $h\doteq\frac{(b-a)}{4}$

- Ejercicio: Aplicar el método Simpson Adaptivo para calcular la integral I con paso inicial $h\doteq 1$ y tolerancia $\varepsilon=0.01$

$$I=\int_0^4 400x(1-x)e^{-2x}\,dx$$

2) MN para Integración en $\mathbb{R}$:

Métodos Adaptivos de Cuadratura



2) MN para Integración en $\mathbb{R}$:

Integración Impropia Primer Tipo

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- Se quiere calcular: $I = \int_0^1 \frac{g(x)}{x^p}dx$ para $0 < p < 1$
- Paso 1: Determinar el polinomio de Taylor de g(x) en torno a x_0 de orden n: $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k$
- Paso 2: Se tiene que: $I = \int_0^1 \frac{[g(x) - p_n(x)]}{x^p}dx + \int_0^1 \frac{p_n(x)}{x^p}dx$
- Paso 3: Para la segunda integral:

$$\int_0^1 \frac{p_n(x)}{x^p}dx = \int_0^1 \left(\frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k}{x^p} \right)dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^{k-p} \right)dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!(k-p+1)}$$

2) MN para Integración en $\mathbb{R}$:

Integración Impropia Primer Tipo

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- Paso 4: Para la primera integral:

$$\int_0^1 \frac{[g(x) - p_n(x)]}{x^p} dx = \int_0^1 G(x) dx$$

- Donde:

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - p_n(x)}{x^p} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 \quad \text{si } x = 0 & \end{cases}$$

- Finalmente se calcula $\int_0^1 G(x) dx$ mediante la Regla de Simpson Compuesta para n=8.

2) MN para Integración en $\mathbb{R}$:

Integración Impropia Segundo Tipo

- Se quiere calcular: $I_\infty = \int_0^\infty f(x)dx$
- Paso 1: $I_\infty = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^\infty f(x)dx$
- Paso 2: Se calcula $\int_0^1 f(x)dx$ mediante la Regla de Simpson considerando n=8 puntos equi-espaciados.
- Paso 3: Se calcula $\int_1^\infty f(x)dx$ haciendo el cambio de variable $u = 1/x$: Se tiene que $\int_1^\infty f(x)dx = \int_0^1 f(1/u)/u^2 du$
- Paso 4: Se calcula $\int_0^1 f(1/u)/u^2 du$ mediante la Regla de Simpson considerando n=4 ó 8 puntos equi-espaciados.

2) MN para Integración en $\mathbb{R}^2$:

Integración Múltiple

- Se quiere calcular: $I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx \approx \alpha \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} c_{ij} f(x_i, y_j)$
- Primero se aplica la Regla de Simpson Compuesta para calcular:

$$I(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

Sea $y_j = c + jh_y \quad j = 1,\ldots,m \quad \text{donde} \quad h_y = (d-c)/m$

$$I(x) \approx \frac{h_y}{3}\left[f(x,y_0) + 4f(x,y_1) + f(x,y_m)\right] + \frac{h_y}{3}\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1}\left[2f(x,y_{2j}) + 4f(x,y_{2j+1})\right]$$

$$Error = -\frac{(d-c)h_y^{\,4}}{180}\frac{\partial^4 f(x,\mu)}{\partial y^4} \quad \text{para } \mu \in (c,d)$$

2) MN para Integración en $\mathbb{R}^2$:

Integración Múltiple

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- Luego:

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx \approx$$

$$\frac{h_y}{3}\left[\int_a^b f(x,y_0)\,dx + 4\int_a^b f(x,y_1)\,dx + \int_a^b f(x,y_m)\,dx\right] +$$

$$\frac{h_y}{3}\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1}\left[2\int_a^b f(x,y_{2j})\,dx + 4\int_a^b f(x,y_{2j+1})\,dx\right]$$

$$Error = -\frac{(d-c)h_y^{\,4}}{180}\frac{\partial^4 f(x,\mu)}{\partial y^4} \quad \text{para } \mu \in (c,d)$$

2) MN para Integración en $\mathbb{R}^2$:

Integración Múltiple

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- Finalmente, se aplica la Regla de Simpson Compuesta para calcular:

$$I_j = \int_a^b f(x, y_j)dy$$

- Considerando los puntos equi-espaciados:

$$x_i = a + ih_x \quad i = 1,\ldots,n \quad \text{donde} \quad h_x = (b-a)/n$$

$$I_j = \frac{h_x}{3}\left[f(x_0,y_j)+4f(x_1,y_j)+f(x_n,y_j)\right]+\frac{h_x}{3}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\left[2f(x_{2i},y_j)+4f(x_{2i+1},y_j)\right]$$

$$Error(I_j) = -\frac{(b-a)h_x^{\,4}}{180}\frac{\partial^4 f(\eta, y_j)}{\partial x^4} \quad \text{para } \eta \in (a,b)$$

2) MN para Integración en $\mathbb{R}^2$:

Integración Múltiple

- La integral $I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$ se calcula según:

$$I \approx \frac{h_x h_y}{9} \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} c_{ij} f(x_i, y_j)$$

$$x_i = a + i h_x \quad \text{donde} \quad h_x = (b-a)/n$$

$$y_j = c + j h_y \quad \text{donde} \quad h_y = (d-c)/m$$

- Los coeficientes c_{ij} se obtienen de la siguiente matriz:

2) MN para Integración en $\mathbb{R}^2$:

Integración Múltiple: Los coeficientes c_{ij} son:

$i=n$	1	4	2	4	2	$\cdots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$i=4$	2	8	4	8	4	$\cdots$	2
$i=3$	4	16	8	16	8	$\cdots$	4
$i=2$	2	8	4	8	4	$\cdots$	2
$i=1$	4	16	8	16	8	$\cdots$	4
$i=0$	1	4	2	4	2	$\cdots$	1
	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$\cdots$	$j=m$

2) MN para Integración en $\mathbb{R}^2$:

Integración Múltiple

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- Ejercicio Propuesto: Calcular la integral:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 e^{-(x^2+y^2)} dydx \approx \frac{h_x h_y}{9} \sum_{j=0}^{8} \sum_{i=0}^{8} c_{ij} f(x_i, y_j)$$

$$x_i = ih_x \quad \text{donde} \quad h_x = \tfrac{1}{8}$$

$$y_j = jh_y \quad \text{donde} \quad h_y = \tfrac{1}{8}$$

- Determine el error relativo de esta aproximación

3) Bibliografía

1) R. Burden & J. D. Faires, Análisis Numérico, Séptima Edición, Thomson Learning, 2002.
2) C. Gerald & P. O. Wheatley, Applied Numerical Analysis 7 Ed., Pearson – Addison & Wesley, 2003.
3) G. Hernández O.: Apuntes de Cálculo Numérico