Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Semestre Otoño 2007
Cálculo Numérico
MA33A-02

Profesor: Gonzalo Hernández.
Auxiliar: Gonzalo Ríos, Constanza Maturana
Fecha: 17 de Mayo

Pauta Control 2

Importante: En sus cálculos numéricos use aritmética finita de 3 cifras significativas con redondeo

1) (50%) Mínimos Cuadrados y Sistema de Ecuaciones No lineales

(a) Demuestre que el problema de optimización

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}x^tQx + r^tx$$

donde Q es simétrica y definida positiva, es resuelto en una iteración por el método de Newton Kantorovich, sin importar el punto inicial. Diga cual es la solución

(b) Se necesita aproximar por mínimos cuadrados la función $f(x) = x\ln x$ por un polinomio $p(x)$ de grado 2, en el intervalo $[0,1]$, y además que $p(0) = 0$, es decir, resolver:

$$\begin{aligned} \min_p E(p) &= \int_0^1 (p(x) - x\ln x)^2 dx \\ p(0) &= 0 \end{aligned}$$

i) De la forma de $p(x)$ y aplique la condicion de interpolación para encontrar alguna constante.

ii) Muestre que E se puede expresar de la forma $\frac{1}{2}x^tQx + r^tx$ (no calcule Q ni r, solo explique porque)

iii) Aplique el método de Newton-Kantorovich para encontrar $p(x)$. Eliga un punto inicial de forma que facilite los cálculos.
Hint: $\int x^n \ln x dx = x^n \left(x\frac{\ln x}{n+1} - \frac{x}{2n+n^2+1} \right)$

(c) Se determinará ahora el mínimo de $f(x) = x\ln x$.
Usando como punto inicial el mínimo de $p(x)$, itere el método de Newton Raphson para encontrar $\bar{x}$, el mínimo de $f(x)$. Comparare $\bar{x}$ con e^{-1}

Etapa 0:	Seleccionar un punto inicial $x^0 \in R^n$, $k = 0$
Etapa 1:	Calcular $F(x^k)$
	Si $\left\|F(x^k)\right\| \leq Tol \Longrightarrow STOP$
	Si no, calcular $\nabla F(x^k)$, $\left[\nabla F(x^k)\right]^{-1}$ y seguir a Etapa 2.
Etapa 2:	Calcular:
	$x^{k+1} = x^k - \left[\nabla F(x^k)\right]^{-1} F(x^k)$
	$k = k + 1$ y volver a Etapa 1.

Metodo de Newton-Kantorovich

2) (50%) Modelación y Optimización:

(a) Modelación:

Un artesano desea contruir una tienda de genero de forma cilindrica con el techo de forma semiesferica. No se incluye el suelo.

El desea maximizar el volumen de su tienda, pero con la restricción que él dispone de un capital $\$D$ para comprar el género, cuyo precio es $\$C$ por metro cuadrado. Determine el modelo de optimización, indicando claramente variables, función objetivo y restricciones.

Hint1: El volumen total de una esfera de radio r y de un cilindro de radio r y altura h son:

$$\begin{aligned} V_e &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ V_c &= \pi r^2 h \end{aligned}$$

Hint2: La superficie total de una esfera de radio r y de un cilindro de radio r y altura h son:

$$\begin{aligned} S_e &= 4\pi r^2 \\ S_c &= \pi r^2 + 2\pi r h \end{aligned}$$

(b) Resolución:

El artesano saco sus cuentas y dispone de \$100.000 para comprar el genero. Una costurera amiga le ofreció a \$1000 por metro cuadrado un excelente género.

i) De la restricción del modelo, despeje una variable en función de las demás.

ii) Determine el modelo equivalente al original, pero sin restricciones.

iii) Intente resolver el problema usando el método del gradiente. ¿Cuál es el inconveniente que presenta? Explique.

iv) Una estimación rápida del diámetro de la tienda es 10 metros. Utilizando esta información encuentre la solución óptima del problema y calcule el volumen de la tienda.

Etapa 0:	Seleccionar un punto inicial $x^0 \in \mathbb{R}^2$
	Definir $k = 0$
Etapa 1:	Calcular: $\nabla f(x^k)$
	Si $\|\nabla f(x^k)\| \leq Tol \Longrightarrow STOP$. Si no, seguir a Etapa 2.
Etapa 2:	Definir: $d^k = -\nabla f(x^k)$
	Calcular: α^k solución del problema en $\mathbb{R}$:
	$\min_{\alpha \geq 0} h_k(\alpha) \doteq f(x^k + \alpha d^k) - f(x^k)$
	Calcular: $x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$
	Definir $k = k + 1$ y volver a Etapa 1.

Método de Gradiente

Solución

1) **Mínimos Cuadrados y Sistema de Ecuaciones No lineales:**

(a) Newton – Kantorovich aplicado al problema min $\frac{1}{2}x^TQx + r^Tx$ se reduce a encontrar un cero del gradiente, es decir:
Si $F(x) = \frac{1}{2}x^TQx + r^Tx$, el método de Newton – Kantorovich aplicado para encontrar un cero de $\nabla F(x)$ queda de la forma:
$x_{k+1} = x_k - [H_F(x_k)]^{-1}\nabla F(x_k)$
ahora, $\nabla F(x) = Qx + r \quad H_F(x) = Q$
$\Longrightarrow x_{k+1} = x_k - Q^{-1}[Qx_k + r] = x_k - x_k - Q^{-1}r = -Q^{-1}r$
Entonces, dado cualquier $x_0 \Longrightarrow x_1 = -Q^{-1}r$. Evaluando $\nabla F(x)$ en x_1 :
$\nabla F(x_1) = Q\left(-Q^{-1}r\right) + r = -r + r = 0$
y como $H_F(x_1) = Q$ es definida positiva se encontró el mínimo de $F(x)$ en solo una iteración.

(b) Minimos Cuadrados y Optimizacion

i) El polinonio que aproxima $f(x) = x\ln x$ es de la forma:
$p(x) = ax^2 + bx + c$
imponiendo la condición de interpolación:
$p(0) = 0 \implies c = 0$
entonces $\quad p(x) = ax^2 + bx$

ii) Tenemos que $E(p) = \displaystyle\int_0^1 (p(x) - x\ln x)^2 dx$

$$\implies E(p) = \int_0^1 (ax^2 + bx - x\ln x)^2 dx$$

Si nos damos cuenta, las variables son a y b, y al expandir y resolver la integral, aparecen términos de la forma $a^2, c^2, ab, a, b,$ por lo que se puede expresar como una funcion cuadrática del tipo $E(p) = \frac{1}{2}x^TQx + r^Tx$ para $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
(Esto no habia que hacerlo)

$$E(p) = \int_0^1 a^2x^4 + abx^3 - ax^3\ln x + abx^3 + b^2x^2 - bx^2\ln x - ax^3\ln x - bx^2\ln x + x^2\ln^2 x\ dx$$

$$= a^2\int_0^1 x^4dx + b^2\int_0^1 x^2dx + ab\int_0^1 2x^3dx - a\int_0^1 2x^3\ln x dx - b\int_0^1 2x^2\ln x + \int_0^1 x^2\ln^2 x\ dx$$

$$= \tfrac{a^2}{5} + \tfrac{ab}{2} + \tfrac{a}{8} + \tfrac{b^2}{3} + \tfrac{2b}{9} + \tfrac{2}{27}$$

iii) De la parte a) y b) , solo debemos hacer una iteración del método de Newton-Kantorovich aplicado a la función $\nabla E(p)$:
Partimos el punto inicial $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces:

$$\nabla E(p) = \begin{pmatrix} 2\displaystyle\int_0^1 (\tfrac{5}{3}x^2 - \tfrac{19}{12}x - x\ln x)(x^2)dx \\ 2\displaystyle\int_0^1 (\tfrac{5}{3}x^2 - \tfrac{19}{12}x - x\ln x)(x)dx \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow H_E(p) = \begin{bmatrix} 2\int_0^1 x^4 dx & 2\int_0^1 x^3 dx \\ 2\int_0^1 x^3 dx & 2\int_0^1 x^2 dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.5 & 0.6667 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Longrightarrow H_E(p)^{-1} = \begin{bmatrix} 40 & -30 \\ -30 & 24 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 39.97 & -29.98 \\ -29.98 & 23.98 \end{bmatrix}$$

Iterando con el método, partiendo de $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

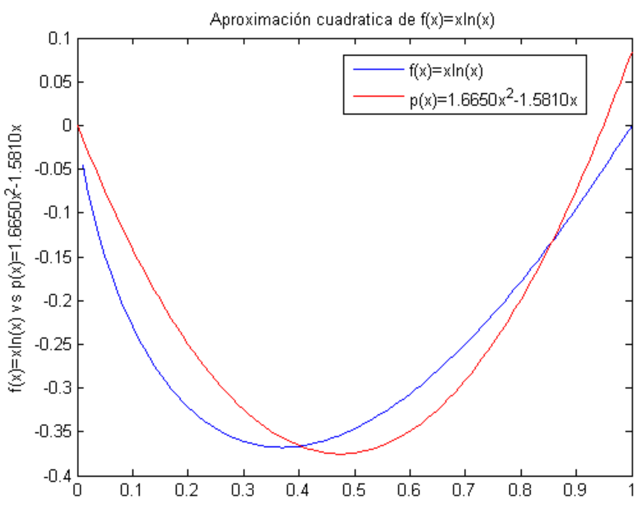
$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 39.97 & -29.98 \\ -29.98 & 23.98 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -2\int_0^1 x^3 \ln x dx \\ -2\int_0^1 x^2 \ln x dx \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 39.97 & -29.98 \\ -29.98 & 23.98 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2\left(\frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16}\Big|_0^1\right) \\ 2\left(\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9}\Big|_0^1\right) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 39.97 & -29.98 \\ -29.98 & 23.98 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2}{16} \\ \frac{-2}{9} \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 39.97 & -29.98 \\ -29.98 & 23.98 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -0.125 \\ -0.2222 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.665 \\ -1.581 \end{pmatrix}$$

Observación: La respuesta exacta es $x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{19}{12} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.667 \\ -1.583 \end{pmatrix}$

Entonces, el polinomio es:
$p(x) = 1.665x^2 - 1.581x$



(c) Para encontrar un punto inicial, encontremos un minimo de $p(x)$:

i) $\Longrightarrow \frac{dp(x)}{dx} = 2 \times 1.665x - 1.581 = 0$
$\Longrightarrow x^{(0)} \approx 0.4748$

ii) Calculemos la 1 y la 2 derivada de $f(x)$ para iterar con el método de Newton Raphson:
$f(x) = x \ln x$
$f'(x) = \ln x + 1$
$f''(x) = \frac{1}{x}$

$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} = x_k - x_k(\ln x_k + 1) = -x_k \ln x_k$

k	x_k	$\ln(x_k)$
0	0.474 8	−0.744 9
1	0.353 7	−1.039
2	0.367 5	−1.001
3	0.367 9	−0.999 9
4	0.367 9	

El método convergió a $\bar{x} = 0.367\,9$

$E_{abs} = \left|0.367\,9 - e^{-1}\right| \approx 2.056 \times 10^{-5}$

$E_{rel} = \frac{\left|0.367\,9 - e^{-1}\right|}{e^{-1}} \approx 5.588 \times 10^{-5} \leq 5 \times 10^{-4}$

$\Rightarrow$tiene 4 cifras significativas exactas, ya que e^{-1} con 4 cifras significativas con redondeo es:

$fl(e^{-1}) \approx 0.3679$

2) **Modelación y Optimización:**

(a) Los datos del problema son: el capital $\$D$ para comprar el género y el precio del metro cuadrado de género $\$C$.

Sean las variables r, h: El radio y la altura del cilindro respectivamente. La función objetivo es:

$$V(r,h) = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$$

Las restriciones son:

$$r, h \geq 0$$
$$(2\pi r^2 + 2\pi r h)C = D$$

La primera restrición indica factibilidad y la segunda es la restrición de capital: el dinero gastado en hacer la tienda debe ser igual al capital.

Entonces el problema de optimización es:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{r,h\geq 0} & V(r,h) = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h \\ \text{s.a.} & (2\pi r^2 + 2\pi r h)C = D \end{array}$$

(b) Resolución

i) Con los datos, la restrición queda: $(2\pi r^2 + 2\pi r h)1000 = 100000$

Despejando r en función de h : $h = \frac{50}{\pi r} - r$

ii) El modelo equivalente, imponiendo la restricción de capital en la función objetivo es:

$$\max_{r,h\geq 0} \quad V(r) = -\frac{1}{3}\pi r^3 + 50r$$

iii) Como se quiere maximizar la función objetivo, para ocupar el método del Gradiente, debemos: $\max V(r) = -\min(-V(r)) = -\min V^*(r)$

con $V^*(r) = \frac{1}{3}\pi r^3 - 50r$

Obs: Tambien se puede utilizar $V(r)$, pero con direccion $\vec{d} = \frac{dV}{dr}$.

Entonces, aplicando el método, partamos del punto inicial $r^0 = 0$

$\Longrightarrow d^0 = -\frac{dV^*}{dr}(r^0) = 50$

Calculemos α^0 que resuelve:

$-\min\limits_{\alpha\geq 0} \quad h_0(\alpha) = V^*(0 + \alpha 50) - V^*(0) = V^*(\alpha 50)$

y como $r^1 = r^0 + \alpha d^0 = 50\alpha$

$-\min \quad V^*(x^{(1)})$

i.e. se resuelve el problema original $\frac{dV}{dr} = 0$. Se nos presenta el inconveniente que volvemos al problema original.

iv) Con el dato de la estimación del diámetro de la tienda, vamos a iterar con el método de Newton Raphson a partir del punto inicial $r = 5$

Sea $F = \frac{dV}{dr} = 50 - \pi r^2$ $\qquad \frac{dF}{dr}(r) = -2\pi r$

$\pi \approx 3.142$

$F = 50 - 3.142r^2$

$\frac{dF}{dr} = -6.284r$

$r_0 = 5$

Iteración 1:

$F(5) = 50 - 3.142 \times 25 = -28.55$

$\frac{dF}{dr}(5) = -6.284 \times 5 = -31.42$

$r_1 = 5 - \frac{28.55}{31.42} = 5 - 0.9087 = 4.091$

Iteración 2:

$F(4.091) = 50 - 3.142 \times 16.74 = 50 - 52.6 = -2.6$

$\frac{dF}{dr}(3.99) = -6.284 \times 4.091 = -25.71$

$r_2 = 4.091 - \frac{2.6}{25.71} = 4.091 - 0.1011 = 3.99$

Iteración 3:

$F(3.99) = 50 - 3.142 \times 15.92 = 50 - 50.02 = -0.02$

$\frac{dF}{dr}(3.99) = -6.284 \times 3.99 = -25.07$

$r_3 = 3.99 - \frac{0.02}{25.07} = 3.99 - 7.978 \times 10^{-4} = 3.989$

Iteración 4:

$F(3.989) = 50 - 3.142 \times 15.91 = 50 - 49.99 = 0.01$

$\frac{dF}{dr}(3.989) = -6.284 \times 3.989 = -25.07$

$r_4 = 3.989 + \frac{0.01}{25.07} = 3.989 + 3.989 \times 10^{-4} = 3.989$

Entonces el método convergió a $r = 3.989$

Solución óptima:

$r = 3.989\,[m]$

$h = \frac{50}{3.142 \times 3.989} - 3.989 = \frac{50}{12.53} - 3.989 = 3.990 - 3.989 = 0.001$

Es decir, el volumen óptimo se alcanza cuando $h \approx 0$, es decir, una tienda semiesferica.

$V(r,h) = 0.6667 \times 3.142 \times (3.989)^3 + 3.142 \times (3.989)^2 \times 0.001 \approx 133$

Volumen de la tienda: 133 $[m^3]$