Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Semestre Otoño 2006
Cálculo Numérico
MA33A-01

Profesor: Gonzalo Hernández.
Auxiliar: Gonzalo Ríos.
Fecha: 07 de Junio

1) Sea $f(\vec{x}) = \vec{c}\cdot\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{x}^t \cdot Q \cdot \vec{x}$, con Q matriz simétrica definida positiva

   (a) Determine el óptimo de f

   (b) Demuestre que aplicando el método de Newton-Kantorovich para el encontrar el óptimo de f se necesita solo una iteración

   (c) Aplique lo anterior para $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + 4x + 2y$

Solución:

$f(\vec{x}) = \vec{c}\cdot\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{x}^t \cdot Q \cdot \vec{x}$

(a) Optimo de $f(\vec{x}) \iff \nabla\ f(\vec{x}) = \vec{0} \wedge Hf(\vec{x})$ definida positiva

$\nabla\ f(\vec{x}) = \nabla(\vec{c}\cdot\vec{x}) + \nabla(\frac{1}{2}\vec{x}^t\cdot Q\cdot\vec{x}\ ) = \vec{c} + \frac{1}{2}Q\cdot\vec{x} + \frac{1}{2}Q^t\cdot\vec{x} = \vec{c} + \frac{1}{2}Q\cdot\vec{x} + \frac{1}{2}Q\cdot\vec{x} = \vec{c} + Q\cdot\vec{x}$

$Hf(\vec{x}) = Q$

$\vec{c} + Q\cdot\vec{x}^* = \vec{0} \Longrightarrow \vec{x}^* = -Q^{-1}\vec{c}$

Q definida positiva, entonces $\vec{x}^*$ es minimo

(b) Usar el método de Newton-Kantorovich para el encontrar el óptimo de f es de la forma $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - Hf(\vec{x}_k)^{-1}\cdot\nabla\ f(\vec{x}_k)$, ya que se busca un cero de $\nabla\ f(\vec{x})$. Para la forma cuadrática, queda:

$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - Q^{-1}\cdot[\vec{c} + Q\cdot\vec{x}_k] = \vec{x}_k - Q^{-1}\cdot\vec{c} - Q^{-1}\cdot Q\cdot\vec{x}_k = \vec{x}_k - Q^{-1}\cdot\vec{c} - I\cdot\vec{x}_k = \vec{x}_k - Q^{-1}\cdot\vec{c} - \vec{x}_k = -Q^{-1}\cdot\vec{c}$

Como se ve, partiendo desde cualquier punto inicial $\vec{x}_0$, al hacer una sola iteración se llega a $\vec{x}_1 = -Q^{-1}\cdot\vec{c}$ que corresponde al óptimo de $f(\vec{x})$ visto anteriormente.

(c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + 4x + 2y = \begin{bmatrix}4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$Q = \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}$ es definida positiva ya que $|2| = 2 > 0 \wedge \begin{vmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{vmatrix} = 3 > 0$

Partiendo con $\vec{x}_0$ cualquiera, tenemos que $\vec{x}_1 = -Q^{-1}\cdot\vec{c} = -\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix}10\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{10}{3}\\-\frac{8}{3}\end{bmatrix}$

2) Una partícula de masa m $[kg]$ que se desplaza por un fluído está sujeta a una resistencia viscoza R $[newtons]$ que es función de la velocidad v $[m/s]$. La relación entre la resistencia R , la velocidad v y el tiempo t está dada por la ecuación integral:

$$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)}du$$

Suponga que $R(v) = -v\sqrt{v}$ para un determinado fluido. Si $m = 10\ kg$ y $v(0) = 10\ m/s$ aproxime el tiempo que demora la partícula en reducir su velocidad a $v = 8\ m/s$ aplicando la Regla de Simpson Compuesta: Para calcular la integral de una función $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ se subdivide en intervalos definidos por los puntos equi-espaciados: $x_0, x_1, ..., x_n$: Si $n \geq 2$ par, $h = \dfrac{(b-a)}{n}$, $x_k = a + kh$, entonces:

$$\int_a^b f(t)dt \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_n) + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(2f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1})\right)\right]$$

Solución:

$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)}du,\ R(v) = -v\sqrt{v}\ ,\ m = 10\ ,\ v(0) = 10\ m/s\ ,\ v = 8\ m/s\ ,n = 8,$

$$\int_a^b f(t)dt \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_n)+\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(2f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})\right)\right]$$

$$t=\int_{v(t_0)}^{v(t)}\frac{m}{R(u)}du=\int_{10}^{8}\frac{10}{-u\sqrt{u}}du \cong -\frac{1}{12}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+4f(x_5)+2f(x_6)+4f(x_7)+f(x_8)\right]$$

$$=-\frac{1}{12}\left[\frac{10}{-8\sqrt{8}}+4\frac{10}{-8.25\sqrt{8.25}}+2\frac{10}{-8.5\sqrt{8.5}}+4\frac{10}{-8.75\sqrt{8.75}}+2\frac{10}{-9\sqrt{9}}\right.$$

$$\left.+4\frac{10}{-9.25\sqrt{9.25}}+2\frac{10}{-9.5\sqrt{9.5}}+4\frac{10}{-9.75\sqrt{9.75}}+\frac{10}{-10\sqrt{10}}\right]$$

$$=\frac{10}{12}\left[0.04419+4\times 0.042\,20+2\times 0.04\,035+4\times 0.03\,864+2\times 0.03\,704\right.$$

$$\left.+4\times 0.03\,555+2\times 0.03\,415+4\times 0.03285+0.031\,62\right]$$

$$=0.833\,3\times 0.8959=0.746\,6$$

Demora aproximadamente $0.746\,6$ *seg*

El valor real es $\int_{10}^{8}\frac{10}{-u\sqrt{u}}=0.746\,5$ *seg*

$E_{abs}=|0.746\,6-0.746\,5|=0.000\,1$

$E_{rel}=\frac{|0.746\,6-0.746\,5|}{|0.746\,5\ |}=1.\,339\,584\,728\,734\,092\,431\,3\times 10^{-4}$

3) Sea $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$. Sea $V=\{xe^x, x\ln(x)\}$ una base de un espacio vectorial linealmente independiente. Se desea aproximar $f(x)$ usando V por el método de los Mínimos Cuadrados, con peso $w(x)=1$ y en el intervalo $D=[0,1]$

(a) Plantear el sistema matricial de ecuaciones

(b) Resolver las integrales de forma explicita si se puede, en caso contrario, usar la regla de simpson

(c) Usando Gauss, resolver el sistema

(d) Deje de forma explicita su aproximación

Solución:

$f(x)=x^2+\frac{1}{x}$, $v(x)=axe^x+bx\ln(x)$, $E(a,b)=\int_0^1[x^2+\frac{1}{x}-(axe^x+bx\ln(x))]^2dx$

(a) $\frac{\partial E(a,b)}{\partial a}=-2\int_0^1[x^2+\frac{1}{x}-(axe^x+bx\ln(x))]xe^xdx=0$

$\Longrightarrow \int_0^1\left(x^2+\frac{1}{x}\right)xe^xdx=a\int_0^1 x^2e^{2x}dx+b\int_0^1 x^2e^x\ln(x)dx$

$\frac{\partial E(a,b)}{\partial b}=-2\int_0^1[x^2+\frac{1}{x}-(axe^x+bx\ln(x))]x\ln(x)dx=0$

$\Longrightarrow \int_0^1\left(x^2+\frac{1}{x}\right)x\ln(x)dx=a\int_0^1 x^2e^x\ln(x)dx+b\int_0^1 x^2\ln^2(x)dx$

$$\begin{bmatrix}\int_0^1 x^2e^{2x}dx & \int_0^1 x^2e^x\ln(x)dx\\ \int_0^1 x^2e^x\ln(x)dx & \int_0^1 x^2\ln^2(x)dx\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{x}\right)xe^xdx\\ \int_0^1\left(x^2+\frac{1}{x}\right)x\ln(x)dx\end{bmatrix}$$

(b) i. $\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{x}\right)xe^xdx=\int_0^1\left(x^3e^x+e^x\right)dx=\int_0^1 x^3e^xdx+e-1=x^3e^x\Big|_0^1-3\int_0^1 x^2e^xdx+e-1=$ $2e-1-3[x^2e^x\Big|_0^1-2\int_0^1 xe^xdx]=2e-1-3[e-2(xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^xdx)]=2e-1-3[e-2(e-e+1)]=$ $2e-1-3e+6=5-e\simeq 2.\,281\,718\,171\,540\,954\,764\,6$

ii. $\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{x}\right)x\ln(x)dx=\int_0^1 x^3\ln(x)dx+\int_0^1\ln(x)dx=\frac{x^4}{4}\ln(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^4}{4}\frac{1}{x}dx+(x\ln x-x)\Big|_0^1=$ $-\frac{x^4}{16}\Big|_0^1-1=-\frac{17}{16}=-1.\,062\,5$

iii. $\int_0^1 x^2e^{2x}dx=x^2\frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1-\int_0^1 xe^{2x}dx=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{xe^{2x}}{2}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{e^{2x}}{2}dx\right]=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{2}+\frac{e^{2x}}{4}\Big|_0^1=\frac{e^2-1}{4}=$ $1.\,597\,264\,024\,732\,662\,556\,8$

iv. $\int\limits_0^1 x^2\ln^2(x)dx = \frac{x^3}{3}\ln^2(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^3}{3}2\ln(x)\frac{1}{x}dx = -\frac{2}{3}\int\limits_0^1 x^2\ln(x)dx = -\frac{2}{3}[\frac{x^3}{3}\ln(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx] =$ $\frac{2}{3}\frac{1}{3}\ \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{27} \simeq 7.407\,407\,407\,407\,407\,407\,4\times 10^{-2}$

v. $\int\limits_0^1 x^2e^x\ln(x)dx \simeq \frac{0.5}{3}[f(0)+4f(0.5)+f(1)] = \frac{1}{6}[0+4\times 0.5^2e^{0.5}\ln(0.5)+0] = -0.190\,467\,750$ $052\,500\,698\,78 \simeq -0.1905$

(c) $\begin{bmatrix} 1.597 & -0.1905 \\ -0.1905 & 7.407\times 10^{-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.281 \\ -1.063 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-0.1905}{1.597} \\ -0.1905 & 7.407\times 10^{-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2.281}{1.597} \\ -1.063 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -0.1193 \\ -0.1905+0.1905\times 1 & 7.407\times 10^{-2}-0.1905\times 0.1193 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.428 \\ -1.063+0.1905\times 1.428 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -0.1193 \\ 0 & \frac{0.05134}{0.05134} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.428 \\ \frac{-0.791}{0.05134} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -0.1193+0.1193\times 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.428-0.1193\times 15.41 \\ -15.41 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4104 \\ -15.41 \end{bmatrix}$

(d) $v(x) = -0.4104xe^x - 15.41x\ln x$