Control N^o 3 MA-33A-1

Dr. Gonzalo Hernández Oliva

UChile - Departamento de Ingeniería Matemática

1) Métodos para Sistemas de Ecuaciones No-Lineales.

   (a) El polinomio de cuarto grado:

   $$p(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$$

   tiene un cero cerca de 1.1. Determine este cero aplicando los métodos de:

   i) La Bisección

   iii) Newton-Raphson

   (b) Resuelva el siguiente SENL mediante el Método de Newton-Kantorovich:

   $$\begin{bmatrix} x\sin(y) \\ y\cos(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

   Usando una aritmetica de 2 cifras significativas con redondeo y partiendo con $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$, haga 2 iteraciones. Calcule el error absoluto de dicha solución.

2) Métodos de Integración:

   La Regla de Simpson Compuesta se obtiene al calcular la integral de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ subdividiendolo en los intervalos de igual largo definidos por los puntos equi-espaciados: $x_0, x_1, ..., x_n$: Si $n \geq 2$ par, $h = \frac{(b-a)}{n}$, $x_k = a + kh$, entonces:

   $$\int_a^b f(t)dt \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_n) + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(2f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}))\right]$$

   Para calcular la integral impropia:

   $$I = \int_0^1 \frac{g(x)}{x^p}dx$$

   mediante los métodos vistos en clases se realiza el siguiente procedimiento:

Paso 1: Determinar el polinomio de Taylor de $g(x)$ en torno a $x_0 = 0$ de orden 4: $p_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k$

Paso 2: $I = \int_0^1 \frac{g(x)-p_4(x)}{x^p} dx + \int_0^1 \frac{p_4(x)}{x^p} dx$

Paso 3: $\int_0^1 \frac{p_4(x)}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{\sum_{k=0}^{4} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k}{x^p} dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{4} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^{k-p} dx = \sum_{k=0}^{4} \frac{g^{(k)}(0)}{k!(k-p+1)}$

Paso 4: $\int_0^1 \frac{g(x)-p_4(x)}{x^p} dx = \int_0^1 G(x) dx$ donde:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-p_4(x)}{x^p} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Se calcula $\int_0^1 G(x) dx$ mediante el M. de Simpson Compuesto con $n = 4$.

Calcule la siguiente integral impropia aplicando este método: $I = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$. Determine el error relativo al utilizar este método comparando con el valor exacto: $I = 2.9253035$

3) Métodos para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias:

La ecuación diferencial de Bernoulli de orden n (entero con $n \neq 1$) se define según:

$$\frac{dy(x)}{dx} + p(x)y(x) = q(x)y(x)^n \qquad 0 \leq x \leq 1 \quad y(x=0) = y_0 \qquad \text{(B)}$$

Esta edo es no lineal pero integrable. Multiplicando (B) por $(1-n)y^{-n}$ se tiene:

$$\frac{d}{dx}(y(x)^{1-n}) + (1-n)p(x)y(x)^{1-n} = q(x)(1-n)$$

Si se define $u(x) = y(x)^{1-n}$ se obtiene la edo de primer orden lineal en la variable $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} + (1-n)p(x)u(x) = q(x)(1-n)$$

Para la sgte. ecuación tipo Bernoulli donde $n = -2, p(x) = x^2, q(x) = x^2$:

$$\frac{dy}{dx} + x^2 y = \frac{x^2}{y^2} \qquad 0 \leq x \leq 1 \quad y(x=0) = 3 \qquad (*)$$

(a) Obtenga la solución analítica de $(*)$.

(b) Obtenga la solución numérica de $(*)$ mediante el método de Runge-Kutta de Orden 3 para $h = 0.2$:

$$q_k^1 = hf(x_k, y_k) \quad q_k^2 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_k^1}{2}) \quad q_k^3 = hf(x_k + h, y_k - q_k^1 + 2q_k^2)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(q_k^1 + 4q_k^2 + q_k^3) \qquad \forall k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Determine la precisión de la solución numérica, comparando la solución analítica y numérica.