Control 2 MA-33A-1

Profesor Dr. Gonzalo Hernandez - Auxiliar Gonzalo Rios

UChile - Departamento de Ingeniería Matemática

1) (50 %) Interpolación Polinomial:

(a) Un automóvil realiza un recorrido por una carretera aproximadamente recta, cronometrándose su velocidad en varios instantes, según lo que se muestra en la tabla:

Tiempo $[s]$	0	5	10	15	20
Velocidad $\left[\frac{km}{h}\right]$	30	60	50	70	40

i) Determine el polinomio de Lagrange que interpola la velocidad del automóvil en $t \in [0, 20]$.

ii) Aproxime la distancia que ha recorrido el automóvil integrando el polinomio de Lagrange que interpola la velocidad del automóvil en $t \in [0, 20]$.

iii) Utilizando los cálculos realizados en (a) y (b), determine el polinomio de Hermite que interpola distancia y velocidad del automóvil en $t \in [0, 20]$.

(b) En la Regla de Simpson Compuesta para calcular $\int_a^b f(x)dx$ se subdivide el intervalo $[a, b]$ en intervalos de igual largo definidos por los puntos equiespaciados: $x_0, x_1, ..., x_n$, y se realiza la aproximación:

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx = \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_L^k(x)dx$$

donde $p_L^k(x)$ es el polinomio de Lagrange de segundo grado que interpola $f(x)$ en los puntos $x_{2k-2}, x_{2k-1}, x_{2k}$ para $k = 1, 2, ..., \frac{n}{2}$. Si $n \geq 1$ par, $h = \dfrac{(b-a)}{n}$, $x_k = a + kh$, entonces:

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(t)dt \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_n)\right] + \frac{h}{3}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left[2f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1})\right]$$

Por otra parte, el área S de la superficie del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje X la región limitada por la curva $y = f(x)$ para $a \leq x \leq b$, está dada por:

$$S = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2}dx$$

Determine S para $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ para $0 \leq x \leq 1$ aplicando la Regla de Simpson Compuesta para $n = 8$.

2) (25%) Interpolación por Spline Cúbicas:

Para la función:

$$f(x) = x\ln(x)$$

(a) Determine la spline sujeta $S_S(x)$ considerando los puntos de interpolación equi-espaciados: $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$.

(b) Cuales son los valores de extrapolación que entregan estas splines en los puntos $1.5, 2.5, 3.5$. Cuál es el error relativo de la extrapolación mediante spline sujeta ?

(c) Aproxime $\int_1^4 f(x)dx$ mediante $\int_1^4 S_S(x)dx$. Cuál es el error relativo de esta aproximación mediante spline sujeta ?

3) (25%) Aproximación por Método de Mínimos Cuadrados

Para la función:

$$f(x) = x\sin(\pi x)$$

(a) Determine la aproximación de MC de $f(x)$ que entregan los polinomios de Legendre $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ en el intervalo $[-1, 1]$, para la función de peso $\omega(x) = 1$.

(b) Determine la aproximación de MC de $f(x)$ que entregan los polinomios trigonométricos $F_2 = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ $(n = 2)$ en el intervalo $[-1, 1]$, para la función de peso $\omega(x) = 1$.

(c) Compare estas aproximaciones en el intervalo $[-1, 1]$. Cuál es la que tiene menor error ?