



Profesor: Gonzalo Hernández
Auxiliar: Gonzalo Ríos
Fecha: 17 de Abril

Auxiliar 6: Interpolación Mediante Spline Cúbicos

Resumen Materia

1. **Spline Cúbica:** $S(x) = \{S_k(x) \mid x \in [x_k, x_{k+1}] \mid k \in \{0..n-1\}\}$ donde:

$$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$$

y verifica:

- (a) i. Interpole: $S_k(x_k) = y_k$ n+1 restricciones
- ii. Continua: $S_{k-1}(x_k) = S_k(x_k)$ n-1 restricciones
- iii. 1° Derivada Continua: $S'_{k-1}(x_k) = S'_k(x_k)$ n-1 restricciones
- iv. 2° Derivada Continua: $S''_{k-1}(x_k) = S''_k(x_k)$ n-1 restricciones

2. **Condiciones de Borde:** Son 4n incógnitas y 4n-2 restricciones + 2 condiciones de borde

- (a) Spline Natural: $S''(x_0) = 0, S''(x_n) = 0$
- (b) Spline Extremos Constantes: $S''(x_0) = S''(x_1), S''(x_n) = S''(x_{n-1})$
- (c) Spline Valor Fijo: $S''(x_0) = \alpha, S''(x_n) = \beta$
- (d) Spline Sujeta: $S'(x_0) = f'(x_0), S'(x_n) = f'(x_n)$

3. **Construcción de la Spline:** se define $c_k = \frac{S''(x_k)}{2}$, $h_k = x_{k+1} - x_k$, $\lambda_k = \frac{a_{k+1} - a_k}{h_k}$, $\mu_k = 3(\lambda_k - \lambda_{k-1})$ y se resuelve el sistema matricial de n+1 incógnitas

$$\begin{bmatrix} \text{Fila} & \text{condición} & \text{de} & \text{borde} & \text{en} & x_0 & & \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & 0 & \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ \text{Fila} & \text{condición} & \text{de} & \text{borde} & \text{en} & x_n & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \\ \mu_n \end{bmatrix}$$

Los otros coeficientes de la spline se obtienen de las ecuaciones:

$$a_k = y_k \quad b_k = \frac{a_{k+1} - a_k}{h_k} - \frac{h_k(2c_k + c_{k+1})}{3} \quad d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}$$

Problemas

1) Determine la spline sujeta de la función $f(x) = \cos(\pi x)$ en los puntos equiespaciados: $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$.

Solución:

$y_0 = \cos(0) = 1, y_1 = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_2 = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0, y_3 = \cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y_4 = \cos(\pi) = -1$. Primero se necesita calcular h_0, h_1, h_2, h_3 y a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 . Como los puntos son equiespaciados: $h_0 = h_1 = h_2 = h_3 = \frac{1}{4}$. Los a_k se determinan están dados por: $a_k = f(x_k) \quad \forall k = 0, 1, \dots, 4$. Luego: $a_0 = 1, a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, a_4 = -1$. El sistema de la spline sujeta es:

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 & 2(h_3 + h_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3(a_1 - a_0)}{h_0} - 3f'(x_0) \\ \frac{3(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{3(a_1 - a_0)}{h_0} \\ \frac{3(a_3 - a_2)}{h_2} - \frac{3(a_2 - a_1)}{h_1} \\ \frac{3(a_4 - a_3)}{h_3} - \frac{3(a_3 - a_2)}{h_2} \\ 3f'(x_4) - \frac{3(a_4 - a_3)}{h_3} \end{bmatrix}$$

Reemplazando los valores:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) \\ 12(1 - \sqrt{2}) \\ 0 \\ -12(1 - \sqrt{2}) \\ -12(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.5147 \\ -4.9706 \\ 0 \\ 4.9706 \\ 3.5147 \end{bmatrix}$$

Cuya solución es:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.1933 \\ -3.6722 \\ 0 \\ 3.6722 \\ 5.1933 \end{bmatrix}$$

Finalmente se tienen que determinar los b_k y d_k . Para ello se utilizan las ecuaciones:

$$\begin{aligned} b_k &= (a_{k+1} - a_k) \frac{1}{h_k} - (c_{k+1} + 2c_k) \frac{h_k}{3} \quad \forall k = 0, \dots, n-1 \\ d_k &= \frac{1}{3h_k} (c_{k+1} - c_k) \quad \forall k = 0, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 - a_0) \frac{1}{h_0} - (c_1 + 2c_0) \frac{h_0}{3} \\ (a_2 - a_1) \frac{1}{h_1} - (c_2 + 2c_1) \frac{h_1}{3} \\ (a_3 - a_2) \frac{1}{h_2} - (c_3 + 2c_2) \frac{h_2}{3} \\ (a_4 - a_3) \frac{1}{h_3} - (c_4 + 2c_3) \frac{h_3}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.2164 \\ -3.1344 \\ -2.2164 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3h_0} (c_1 - c_0) \\ \frac{1}{3h_1} (c_2 - c_1) \\ \frac{1}{3h_2} (c_3 - c_2) \\ \frac{1}{3h_3} (c_4 - c_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0281 \\ 4.8963 \\ 4.8963 \\ 2.0281 \end{bmatrix}$$

- 2) En los últimos años, el precio de la bencina en Chile a tenido fuertes alzas. A continuación se muestran algunos datos sobre el precio de la bencina 95 octanos desde Diciembre del 2004 hasta Agosto del 2006:

Fecha	15/12/04	27/01/05	22/03/05	09/05/05	13/06/05	18/08/05
Pesos/Litro	488	508	553	564	543	576

Fecha	15/09/05	08/10/05	04/11/05	12/01/06	29/04/06	15/06/06
Pesos/Litro	619	628	587	566	636	668

A partir de los datos, en función de los días transcurridos desde el 15/12/04 construya la Spline Cúbica.

- 3) En el parque nacional Torres del Paine, situado en la XII Región de Chile, un turista amigo suyo sacó una fotografía a las torres:

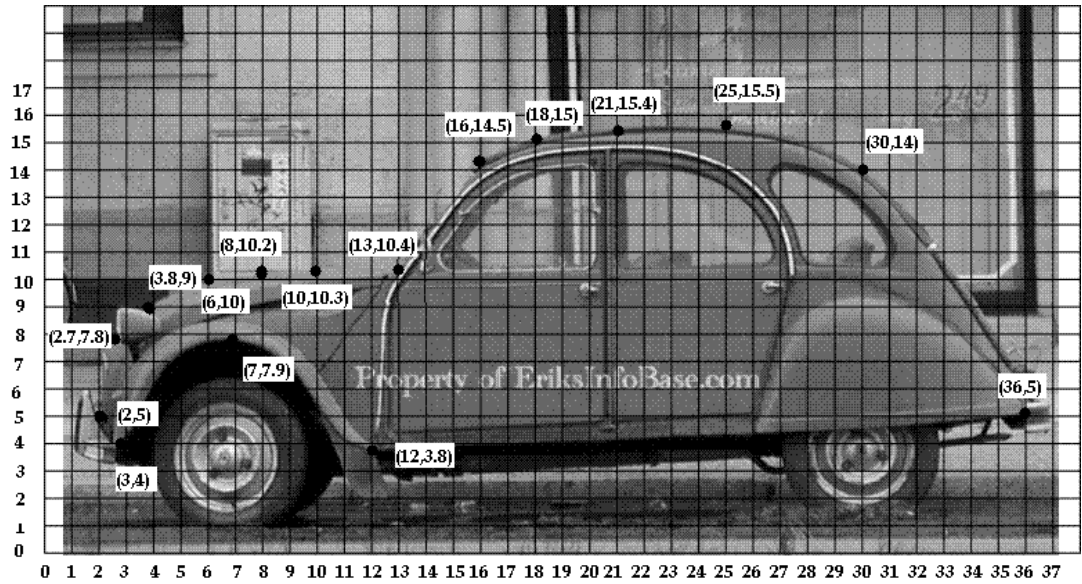


La Organización Internacional del Medio Ambiente desea hacer estudios sobre la composición de las rocas de las Torres del Paine, pero para realizar esto se necesita la función de altura de las Torres. Modele esta función mediante una Spline Cúbica, a partir de la fotografía. Grafique la función.

4) Construyamos mediante splines cúbicos el contorno de la citroneta de la fotografía:



i) Primero, se realiza la toma de datos usando una malla cuadriculada sobre la fotografía:



ii) Luego, los datos se tabulan. Los datos del contorno superior son:

$$: \begin{bmatrix} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ x_k & 2 & 2.7 & 3.8 & 6 & 8 & 10 & 13 & 16 & 18 & 21 & 25 & 30 & 36 \\ y_k & 5 & 7.8 & 9 & 10 & 10.2 & 10.3 & 10.4 & 14.5 & 15 & 15.4 & 15.5 & 14 & 5 \end{bmatrix}$$

iii) Ahora se calculan los elementos de la matriz, considerando las definiciones:

$$h_k = x_{k+1} - x_k$$

$$\lambda_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k}$$

$$\mu_k = 3(\lambda_k - \lambda_{k-1})$$

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 1 & 2 & 3 \\ h_k & 0.7 & 1.1 & 2.2 & 2 \\ \lambda_k & \frac{2.8}{0.7} = 4 & \frac{1.2}{1.1} = \frac{12}{11} & \frac{1}{2.2} = \frac{5}{11} & \frac{0.2}{2} = \frac{1}{10} \\ \mu_k & 3 \times \left(\frac{12}{11} - 4 \right) = -\frac{96}{11} & 3 \times \left(\frac{5}{11} - \frac{12}{11} \right) = -\frac{21}{11} & 3 \times \left(\frac{1}{10} - \frac{5}{11} \right) = -\frac{117}{110} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k & 4 & 5 & 6 & 7 \\ h_k & 2 & 3 & 3 & 2 \\ \lambda_k & \frac{0.1}{2} = \frac{1}{20} & \frac{0.1}{3} = \frac{1}{30} & \frac{4.1}{3} = \frac{41}{30} & \frac{0.5}{2} = \frac{1}{4} \\ \mu_k & 3 \times (\frac{1}{20} - \frac{1}{10}) = -\frac{3}{20} & 3 \times (\frac{1}{30} - \frac{1}{20}) = -\frac{1}{20} & 3 \times (\frac{41}{30} - \frac{1}{30}) = 4 & 3 \times (\frac{1}{4} - \frac{41}{30}) = -\frac{67}{20} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k & 8 & 9 & 10 & 11 \\ h_k & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \lambda_k & \frac{0.4}{3} = \frac{2}{15} & \frac{0.1}{4} = \frac{1}{40} & -\frac{1.5}{5} = -\frac{3}{10} & -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2} \\ \mu_k & 3 \times (\frac{2}{15} - \frac{1}{4}) = -\frac{7}{20} & 3 \times (\frac{1}{40} - \frac{2}{15}) = -\frac{13}{40} & 3 \times (-\frac{3}{10} - \frac{1}{40}) = -\frac{39}{40} & 3 \times (-\frac{3}{2} + \frac{3}{10}) = -\frac{18}{5} \end{bmatrix}$$

iv) Usando las condiciones de borde de spline natural: $S''(x_0) = 0$, $S''(x_n) = 0$, y reemplazando valores, el sistema queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{10} & \frac{18}{5} & \frac{11}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{10} & \frac{33}{5} & \frac{11}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{5} & \frac{42}{5} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 10 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 12 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 10 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 10 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 14 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 18 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 22 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \\ c_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{96}{11} \\ -\frac{21}{11} \\ -\frac{11}{110} \\ -\frac{117}{110} \\ -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{20} \\ 4 \\ -\frac{67}{20} \\ -\frac{7}{20} \\ -\frac{13}{40} \\ -\frac{39}{40} \\ -\frac{18}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

v) Se resuelve el sistema aproximando con 4 cifras significativas con redondeo

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -2.482 \\ 0.1888 \\ -0.1932 \\ 0.07197 \\ -0.1697 \\ 0.5009 \\ -0.5007 \\ 0.07707 \\ -0.03977 \\ 0.0001334 \\ -0.1637 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vi) Se construye la spline natural, $\forall k = 0, 1, \dots, 11$

$$\begin{aligned} S_k(x) &= a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3 \\ a_k &= y_k \\ b_k &= \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{h_k(2c_k + c_{k+1})}{3} \\ d_k &= \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ x_k & 2 & 2.7 & 3.8 & 6 & 8 & 10 & 13 \\ y_k & 5 & 7.8 & 9 & 10 & 10.2 & 10.3 & 10.4 \\ h_k & 0.7 & 1.1 & 2.2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} & 4 & 1.091 & 0.4545 & 0.1 & 0.05 & 0.03333 & 1.367 \\ c_k & 0 & -2.482 & 0.1888 & -0.1932 & 0.07197 & -0.1697 & 0.5009 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ x_k & 16 & 18 & 21 & 25 & 30 & 36 \\ y_k & 14.5 & 15 & 15.4 & 15.5 & 14 & 5 \\ h_k & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} & 0.25 & 0.1333 & 0.025 & -0.3 & -1.5 \\ c_k & -0.5007 & 0.07707 & -0.03977 & 0.0001334 & -0.1637 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k = 0$$

$$S_0(x) = 5 + \left(4 - \frac{0.7 \times (2 \times 0 - 2.482)}{3}\right) \times (x - 2) + 0 \times (x - 2)^2 + \frac{-2.482 - 0}{3 \times 0.7} \times (x - 2)^3$$

$$\Rightarrow S_0(x) = 7.091x^2 - 9.604x - 1.182x^3 + 5.297$$

$$k = 1$$

$$S_1(x) = 7.8 + \left(1.091 - \frac{1.1 \times (2 \times (-2.482) + 0.1888)}{3}\right) \times (x - 2.7) - 2.482 \times (x - 2.7)^2 + \frac{0.1888 + 2.482}{3 \times 1.1} \times (x - 2.7)^3$$

$$\Rightarrow S_1(x) = 33.94x - 9.038x^2 + 0.8093x^3 - 33.9$$

$$k = 2$$

$$S_2(x) = 9 + \left(0.4545 - \frac{2.2 \times (2 \times 0.1888 - 0.1932)}{3}\right) \times (x - 3.8) + 0.1888 \times (x - 3.8)^2 + \frac{-0.1932 - 0.1888}{3 \times 2.2} \times (x - 3.8)^3$$

$$\Rightarrow S_2(x) = 0.8486x^2 - 3.623x - 0.05788x^3 + 13.69$$

$$k = 3$$

$$S_3(x) = 10 + \left(0.1 - \frac{2 \times (2 \times (-0.1932) + 0.07197)}{3}\right) \times (x - 6) - 0.1932 \times (x - 6)^2 + \frac{0.07197 + 0.1932}{3 \times 2} \times (x - 6)^3$$

$$\Rightarrow S_3(x) = 7.401x - 0.9887x^2 + 0.0442x^3 - 8.359$$

$$k = 4$$

$$S_4(x) = 10.2 + \left(0.05 - \frac{2 \times (2 \times 0.07197 - 0.1697)}{3}\right) \times (x - 8) + 0.07197 \times (x - 8)^2 + \frac{-0.1697 - 0.07197}{3 \times 2} \times (x - 8)^3$$

$$\Rightarrow S_4(x) = 1.039x^2 - 8.818x - 0.04028x^3 + 34.89$$

$$k = 5$$

$$S_5(x) = 10.3 + \left(0.03333 - \frac{3 \times (2 \times (-0.1697) + 0.5009)}{3}\right) \times (x - 10) - 0.1697 \times (x - 10)^2 + \frac{0.5009 + 0.1697}{3 \times 3} \times (x - 10)^3$$

$$\Rightarrow S_5(x) = 25.62x - 2.405x^2 + 0.07451x^3 - 79.9$$

$$k = 6$$

$$S_6(x) = 10.4 + \left(1.367 - \frac{3 \times (2 \times 0.5009 - 0.5007)}{3}\right) \times (x - 13) + 0.5009 \times (x - 13)^2 + \frac{-0.5007 - 0.5009}{3 \times 3} \times (x - 13)^3$$

$$\Rightarrow S_6(x) = 4.841x^2 - 68.58x - 0.1113x^3 + 328.3$$

$$k = 7$$

$$S_7(x) = 14.5 + \left(0.25 - \frac{2 \times (2 \times (-0.5007) + 0.07707)}{3}\right) \times (x - 16) - 0.5007 \times (x - 16)^2 + \frac{0.07707 + 0.5007}{3 \times 2} \times (x - 16)^3$$

$$\Rightarrow S_7(x) = 90.84x - 5.123x^2 + 0.0963x^3 - 522$$

$$k = 8$$

$$S_8(x) = 15 + \left(0.1333 - \frac{3 \times (2 \times 0.07707 - 0.03977)}{3}\right) \times (x - 18) + 0.07707 \times (x - 18)^2 + \frac{-0.03977 - 0.07707}{3 \times 3} \times (x - 18)^3$$

$$\Rightarrow S_8(x) = 0.7781x^2 - 15.37x - 0.01298x^3 + 115.3$$

$$k = 9$$

$$S_9(x) = 15.4 + \left(0.025 - \frac{4 \times (2 \times (-0.03977) + 0.0001334)}{3}\right) \times (x - 21) - 0.03977 \times (x - 21)^2 + \frac{0.0001334 + 0.03977}{3 \times 4} \times (x - 21)^3$$

$$\Rightarrow S_9(x) = 6.201x - 0.2493x^2 + 0.003325x^3 - 35.68$$

$$k = 10$$

$$S_{10}(x) = 15.5 + \left(-0.3 - \frac{5 \times (2 \times (0.0001334) - 0.1637)}{3}\right) \times (x - 25) + 0.0001334 \times (x - 25)^2 + \frac{-0.1637 - 0.0001334}{3 \times 5} \times (x - 25)^3$$

$$\Rightarrow S_{10}(x) = 0.8193x^2 - 20.51x - 0.01092x^3 + 186.9$$

$$k = 11$$

$$S_{11}(x) = 14 + \left(-1.5 - \frac{6 \times (2 \times (-0.1637) + 0)}{3}\right) \times (x - 30) - 0.1637 \times (x - 30)^2 + \frac{0 + 0.1637}{3 \times 6} \times (x - 30)^3$$

$$\Rightarrow S_{11}(x) = 33.53x - 0.9822x^2 + 0.009094x^3 - 353.5$$

vii) Finalmente, la spline cúbica es:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & \text{si } x \in [2, 2.7] \\ S_1(x) & \text{si } x \in [2.7, 3.8] \\ S_2(x) & \text{si } x \in [3.8, 6] \\ S_3(x) & \text{si } x \in [6, 8] \\ S_4(x) & \text{si } x \in [8, 10] \\ S_5(x) & \text{si } x \in [10, 13] \\ S_6(x) & \text{si } x \in [13, 16] \\ S_7(x) & \text{si } x \in [16, 18] \\ S_8(x) & \text{si } x \in [18, 21] \\ S_9(x) & \text{si } x \in [21, 25] \\ S_{10}(x) & \text{si } x \in [25, 30] \\ S_{11}(x) & \text{si } x \in [30, 36] \end{cases}$$

viii) Propuesto: Calcule la Spline de la parte inferior del contorno del escarabajo, considerando los datos:

$$\begin{bmatrix} x_k & 2 & 3 & 7 & 12 & 36 \\ y_k & 5 & 4 & 7.9 & 3.8 & 5 \end{bmatrix}$$

5) Splines Cubicas en Matlab:

Primero que todo se tienen que definir los puntos (x, y) que se utilizarán como datos para calcular las splines. Por ejemplo:

```
x=(0:0.05:6); y=x.*cos(x.^2); plot(x,y,'-ob'); hold on;
```

Se calcula la spline sujeta para $y = x \cos(x^2)$ con $y'(0) = 1, y'(6) = 71.2801$ mediante las instrucciones:

```
pp=csape(x,[1 y 71.2801],[1 1]);
```

La estructura "pp" contiene:

- Los 121 puntos $x = 0, 0.05, 0.1, \dots, 6$ denominados por Matlab como "breaks"
- Los coeficientes de la Splines: "coefs"

d_0	c_0	b_0	a_0
d_1	c_1	b_1	a_1
d_2	c_2	b_2	a_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
d_{n-2}	c_{n-2}	b_{n-2}	a_{n-2}
d_{n-1}	c_{n-1}	b_{n-1}	a_{n-1}

- La cantidad de intervalos: $l = 120$.
- El orden de las splines: $k = 4$.
- La dimensión de las splines: $d = 1$.

Para evaluar la spline "pp" en puntos distintos a los "breaks" se utilizan las instrucciones (por ejemplo):

```
xx=(0:0.01:6);
```

```
yy=fval(pp,xx);
```

Se pueden mostrar los detalles de la splines (coefs) mediante la instrucción:

```
[breaks,coefs,l,k,d] = unmkpp(pp);
```

Como también realizar operaciones sobre la estructura "pp" como por ejemplo derivarla e integrarla:

```
der_pp = fnder(pp);
```

```
der_pp = fnder(pp,dorder);
```

```
int_pp = fnint(pp);
```

```
int_pp = fnint(pp,value);
```

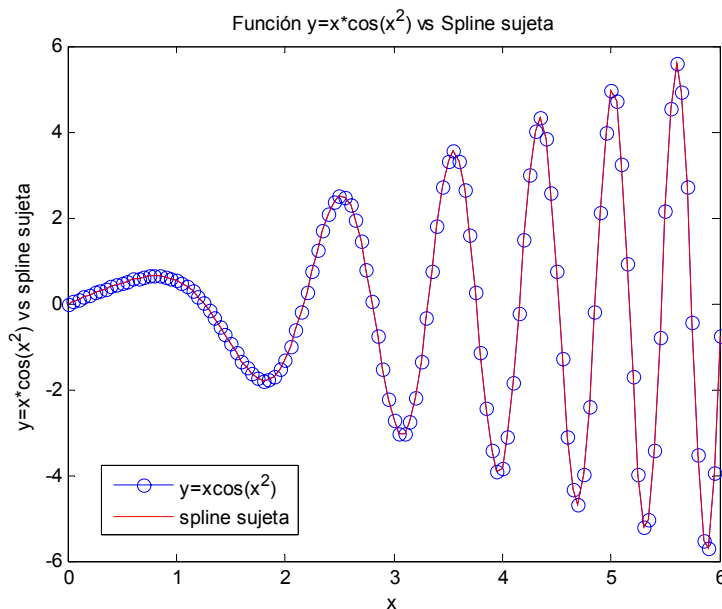
Las funciones "fnder" y "fint" devuelven la derivada e integral de la spline en la forma "pp".

Finalmente, podemos graficamos la spline resultante sobre el gráfico anterior, mediante:

```
plot(xx,yy,'-r'); hold on;
```

O también:

```
fnplt(pp,'-r');
```



Otros comandos del Spline Toolbox en Matlab son:

- 1) **spline**: Interpolación spline cúbica con condiciones de frontera sujeta
- 3) **csapi**: Interpolación spline cúbica con condiciones de frontera not-a-knot
- 4) **cpapi**: Interpolación spline general (lineal, cuadrática, cúbica, cuártica, etc).
- 5) **csaps**: Interpolación spline cúbica suavizante.