Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Semestre Otoño 2007
Cálculo Numérico
MA33A-02

Profesor: Gonzalo Hernández.
Auxiliar: Gonzalo Ríos, Constanza Maturana
Fecha: 04 de Abril

Auxiliar 4: Factorización y Métodos Iterativos

Resumen Materia

1. **Matriz tridiagonal:** Una matriz A cuadrada es tridiagonal si sus coeficientes no nulos se ubican en las diagonales principal y secundarios.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. **Método de Crout para matrices tridiagonales:**Una matriz tridiagonal puede ser factorizada $A = LU$ como:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & l_{44} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & l_{n(n-1)} & l_{nn} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & u_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Condición Inicial:
      i. $l_{11} = a_{11}$
      ii. $u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}$

   (b) Para $i = 2, ...n - 1$
      i. $l_{i(i-1)} = a_{i(i-1)}$
      ii. $l_{ii} = a_{ii} - l_{i(i-1)}u_{(i-1)i}$
      iii. $u_{i(i+1)} = \frac{a_{i(i+1)}}{l_{ii}}$

   (c) Para $i = n$
      i. $l_{n(n-1)} = a_{n(n-1)}$
      ii. $l_{nn} = a_{nn} - l_{n(n-1)}u_{(n-1)n}$

Algoritmo de Crout

```
L[1,1]=a[1,1]
U[1,2]=a[1,1] / L[1,1]
For k=2 To (n-1)
      L[k,k-1]=a[k,k-1]
      L[k,k]=a[k,k]-L[k,k-1]*U[k-1,k]
      U[k,k+1]=a[k,k+1] / L[k,k]
End For k
L[n,n-1]=a[n,n-1]
L[n,n]=a[n,n]-L[n,n-1]*U[n-1,n]
```

$$N^o deOps = 1 + \sum_{i=2}^{n-1} 3 + 2 = 3(n-2) + 3 = 3(n-1) = 3n - 3 \qquad o(n)lineal$$

3. **Matriz definida positiva:**

   (a) Una matriz cuadrada A es definida positiva si y solo si: $\overrightarrow{x}^t A \overrightarrow{x} > 0 \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$
   (b) Teorema: Si A es definida positiva, entonces se cumple:

i. $\det(A) \neq 0$
ii. $a_{kk} > 0 \forall k = 1, ..., n$
iii. $\max_{1\leq j,k\leq n} |a_{kj}| \leq \max_{1\leq k\leq n} |a_{kk}|$
iv. $(a_{ij})^2 \leq a_{ii}a_{jj} \forall i \neq j$

(c) Teorema: A es definida positiva si y solo si los determinantes de las matrices cofactores principales son positivos: $\det(A_{kk}) > 0 \forall k = 1, ..., n$ donde

$$A_{kk} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

(d) Teorema: A es definida positiva si y solo si puede factorizarse como $A = LL^t$ donde L es una matriz triangular inferios con $l_{ii} > 0 \forall i = 1, ..., n$.

4. **Método de Cholesky:**

(a) $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$

(b) Para $j = 2, ..., n$ $\;l_{j1} = \frac{a_{j1}}{l_{11}}$

(c) Para $i = 2, ..., n-1$ y $j = (i+1), ..., n$

i. $l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{n-1}(l_{nk})^2}$ $\qquad l_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}l_{ik}}{l_{ii}}$

(d) $l_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1}(l_{nk})^2}$

Algoritmo de Cholesky

```
L[1,1]=sqrt(a[1,1])
For j=2 To n
    L[j,1]=a[j,1] / L[1,1]
End For j
For k=2 To (n-1)
    sum=0
    For m=1 To (k-1)
        sum=sum+L[k,m]*L[k,m]
    End For m
    L[k,k]=sqrt([k,k]-sum)
    For i=k+1 To n
        sum=0
        For m=1 To (k-1)
            sum=sum+L[i,m]*L[k,m]
        End For m
        L[i,k]=(a[i,k]-sum) / L[k,k]
    End For i
End for k
```

$$N^o deOps = 1 + \sum_{j=2}^{n} 1 + \sum_{i=2}^{n-1}(2 + \sum_{k=1}^{i-1} 2 + \sum_{j=i+1}^{n}(2 + \sum_{k=1}^{i-1} 2)) + 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2$$
$$= 1 + (n-2+1) + 6n^2 - 3n^3 - 5n + 2 + 2 + 2(n-1)$$
$$= 1 + n - 1 + 6n^2 - 3n^3 - 5n + 2 + 2n - 2 = 6n^2 - 3n^3 - 2n \qquad o(n^3)$$

5. **Métodos Iterativos:**

(a) La idea es empezar por una aproximación inicial $\overrightarrow{x}^{(0)}$ a la solución $\overrightarrow{x}$ del sistema $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, y generar una sucesión de vectores $\left\{\overrightarrow{x}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ que converge a $\overrightarrow{x}$.

(b) La forma de los elementos de la sucesión es $\overrightarrow{x}^{(k+1)} = f(\overrightarrow{x}^{(k)})$

(c) Los métodos más utilizados son del tipo $f(\overrightarrow{x}^{(k)}) = B\overrightarrow{x}^{(k)} + \overrightarrow{h}$ donde $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^n$

6. **Construyendo un Método Iterativo:**

(a) Sean M y $N \in \mathbb{R}^{nxn}$ tales que: M es invertible y $A = M - N$

(b) $Ax = b \iff Mx = Nx + b \iff x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$

(c) $B = M^{-1}N$ y $h = M^{-1}b$

(d) Se puede descomponer A como $A = diag(A) + low(A) + up(A)$ donde

i. $diag(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \ si \ i = j \\ 0 \ si \ i \neq j \end{cases}$ matriz diagonal

ii. $low(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \ si \ i > j \\ 0 \ si \ i \leq j \end{cases}$ matriz triangular inferior

iii. $up(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \ si \ i < j \\ 0 \ si \ i \geq j \end{cases}$ matriz triangular superior

7. **Método de Jacobi:**

(a) Se define M y N

i. $M = diag(A)$

ii. $N = -[low((A) + up(A)]$

iii. $B = -diag(A)^{-1}[low(A) + up(A)]$

iv. $h = diag(A)^{-1}b$

(b) El vector de la iteración k del método de Jacobi satisface la siguiente fórmula iterativa:

$$x_i^{(k)} = \frac{(-\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i)}{a_{ii}} 1 \leq i \leq n, k = 1, 2, 3...$$

8. **Método de Gauss-Seidel:**

(a) Se define M y N

i. $M = [diag(A) + low(A)]$

ii. $N = -up(A)$

iii. $B = -[diag(A) + low(A)]^{-1}[up(A)]$

iv. $h = [diag(A) + low(A)]^{-1}b$

(b) El vector de la iteración k del método de Gauss-Seidel satisface la siguiente fórmula iterativa:

$$x_i^{(k)} = \frac{(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_i^{(K)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i)}{a_{ii}} 1 \leq i \leq n, k = 1, 2, 3...$$

<u>Problemas</u>:

1. Encuentre la factorización de Crout de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Encuentre la factorización de Cholesky de la matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Mediante el método iterativo de Gauss-Seidel encuentre la solucion del siguiente sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>Respuestas:</u>

1.

Paso1: $l_{11} = a_{11} = 5$

$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{-2}{5}$

Paso2: $l_{21} = a_{21} = -2$

$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 5 - (-2)(\frac{-2}{5}) = \frac{21}{5}$

$u_{23} = \frac{a_{23}}{l_{22}} = \frac{-2}{\frac{21}{5}} = \frac{-10}{21}$

$l_{32} = a_{32} = -2$

$l_{33} = a_{33} - l_{32}u_{23} = 5 - (-2)(\frac{-10}{2}) = \frac{85}{21}$

$u_{34} = \frac{a_{34}}{l_{33}} = \frac{-2}{\frac{85}{21}} = \frac{-42}{85}$

Paso3: $l_{34} = a_{34} = -2$

$l_{33} = a_{33} - l_{32}u_{23} = 5 - (-2)(\frac{-42}{85}) = \frac{341}{85}$

$$\implies L = \begin{matrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{21}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{85}{21} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{341}{85} \end{matrix} \qquad U = \begin{matrix} 1 & \frac{-2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-10}{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-42}{85} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

2. Verifiquemos primero que es definida positiva

$|4| > 0$

$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 > 0$

$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 32 > 0$ $\implies$ por lo tanto la matriz B de definida positiva

Ahora calculemos la descomposición:

Paso1: $l_{11} = \sqrt{4} = 2$

Paso2: $j = 2, 3$ $\quad l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = 1$

$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = 0$

Paso3: $i = 2$ $\quad l_{22} = (4-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$j = 3$ $\quad l_{32} = \frac{2-0\cdot 1}{\sqrt{3}}$

Paso4: $l_{33} = (4 + 0 - (\frac{2\sqrt{3}}{3})^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}$

$$\implies L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}$$

3.

$$B = -(D+L)^{-1}U = -\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{h} = (D+L)^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^{k+1} = M\vec{x}^k + \vec{N} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2^k + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}x_2^k - \frac{1}{2}x_3^k + \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8}x_2^k + \frac{1}{4}x_3^k + \frac{3}{16} \end{bmatrix}$$

i. $\vec{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{x}^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix}$

$\vec{x}^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{7}{32} \end{bmatrix}$

$\vec{x}^3 = \begin{bmatrix} \frac{7}{32} \\ \frac{1}{32} \\ \frac{15}{64} \end{bmatrix}$

$\vec{x}^4 = \begin{bmatrix} \frac{15}{64} \\ \frac{1}{64} \\ \frac{31}{128} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.234\,375 \\ 0.015\,625 \\ 0.242\,187\,5 \end{bmatrix}$

$\vec{x}^5 = \begin{bmatrix} \frac{31}{128} \\ \frac{1}{128} \\ \frac{63}{256} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.242\,187\,5 \\ 0.007\,812\,5 \\ 0.246\,093\,75 \end{bmatrix}$