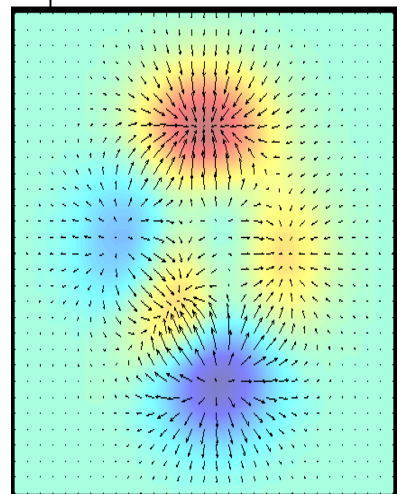
Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Matemática

Cálculo Numérico MA-33A

Métodos Numéricos para Sistemas de Ecuaciones Lineales



Gonzalo Hernández Oliva

MN para SEL: Temario

1) Motivación – Aplicaciones SEL:
   a) Interpolación Polinomial
   b) Mínimos Cuadrados
   c) Método Simplex – Optimización Lineal
2) Definiciones y Resultados Básicos
3) Métodos de Pivoteo (Directos) para SEL: Gauss y Gauss-Jordan
4) Análisis de Error del Método de Gauss

MN para SEL: Temario

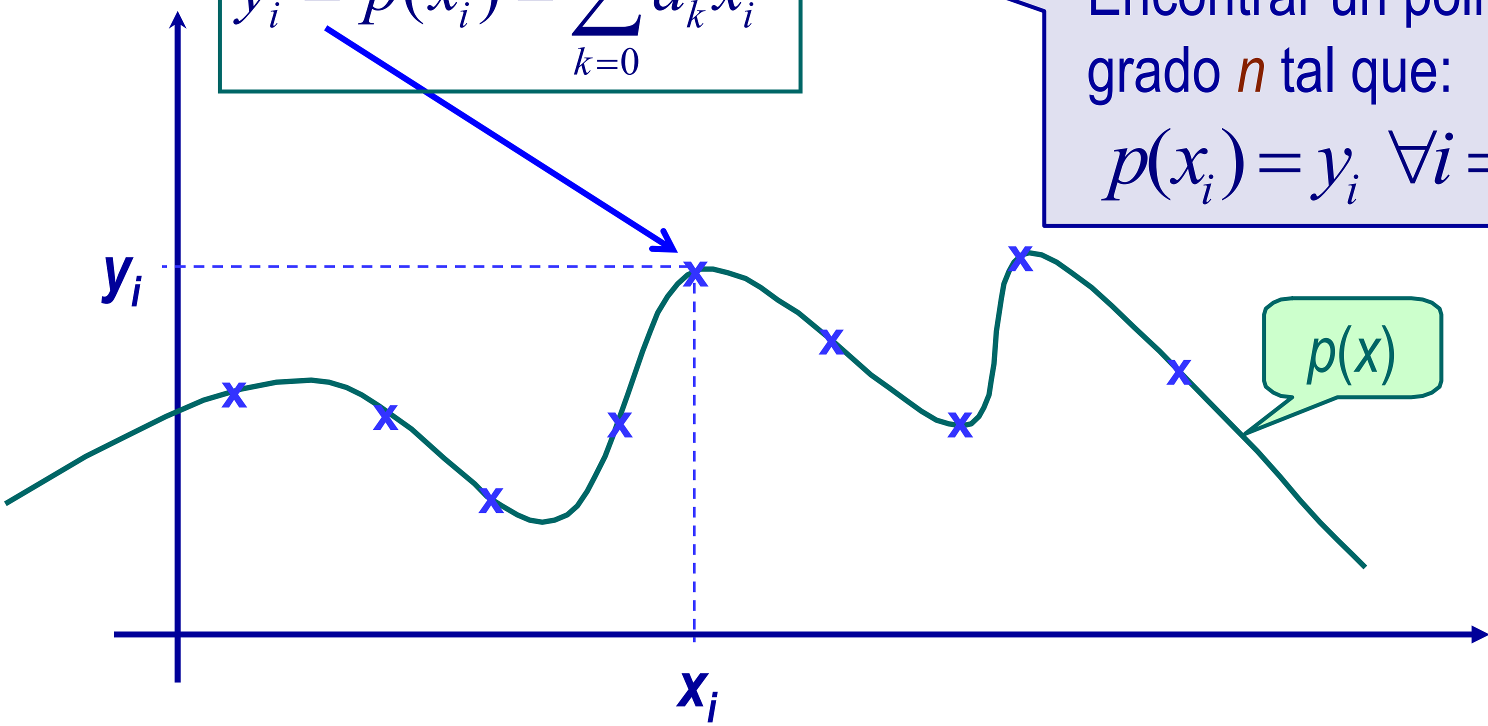
5) Matriz Inversa y Determinante
6) Factorización de Matrices
7) Métodos Iterativos para SEL
   a) Método de Jacobi y Gauss-Seidel
   b) Método de Relajación SOR y Gradiente Conjugado
   c) Análisis de Error de los Métodos Iterativos
   d) Métodos para Vectores y Valores Propios

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
1) Motivación 1: Interpolación Polinomial

$$y_i = p(x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^{\,k}$$

Dados (n+1) puntos (x_i, y_i)
Encontrar un polinomio de grado *n* tal que:

$$p(x_i) = y_i \quad \forall i = 1, \ldots, n+1$$



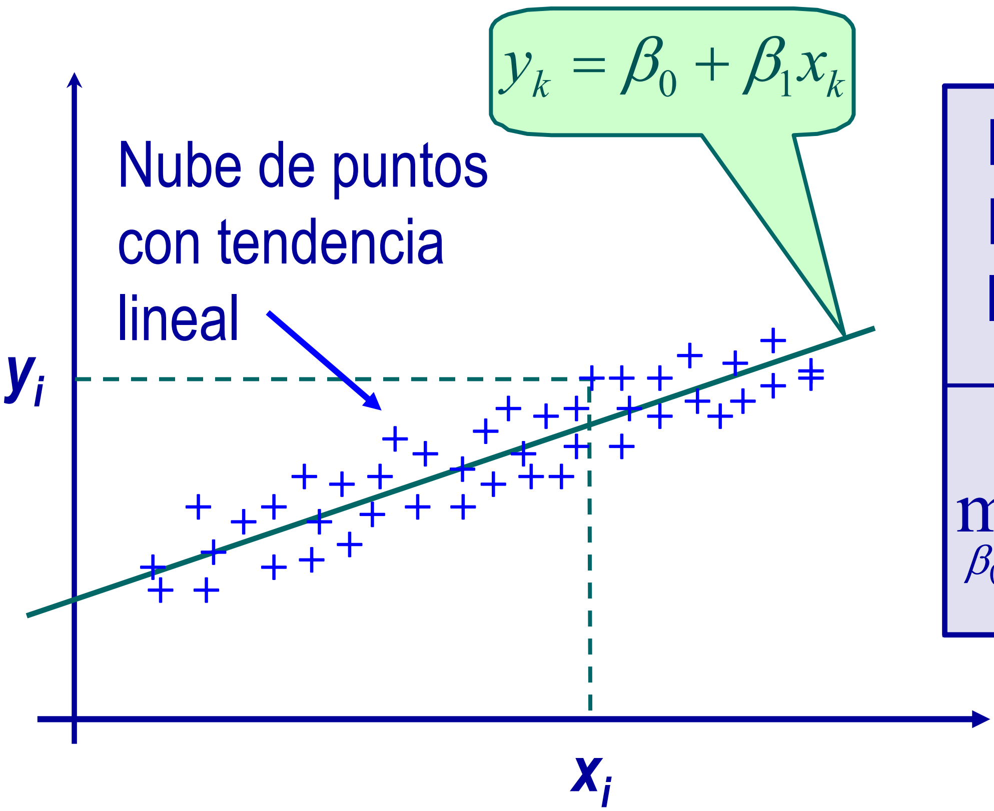
MN para Sist. de Ecs. Lineales:

1) Motivación 1: Interpolación Polinomial

$$\boxed{\begin{gathered} y_i = p(x_i)\ \forall i = 1,\ldots,(n+1) \\ y_i = p(x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^{\,k} \end{gathered}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$$

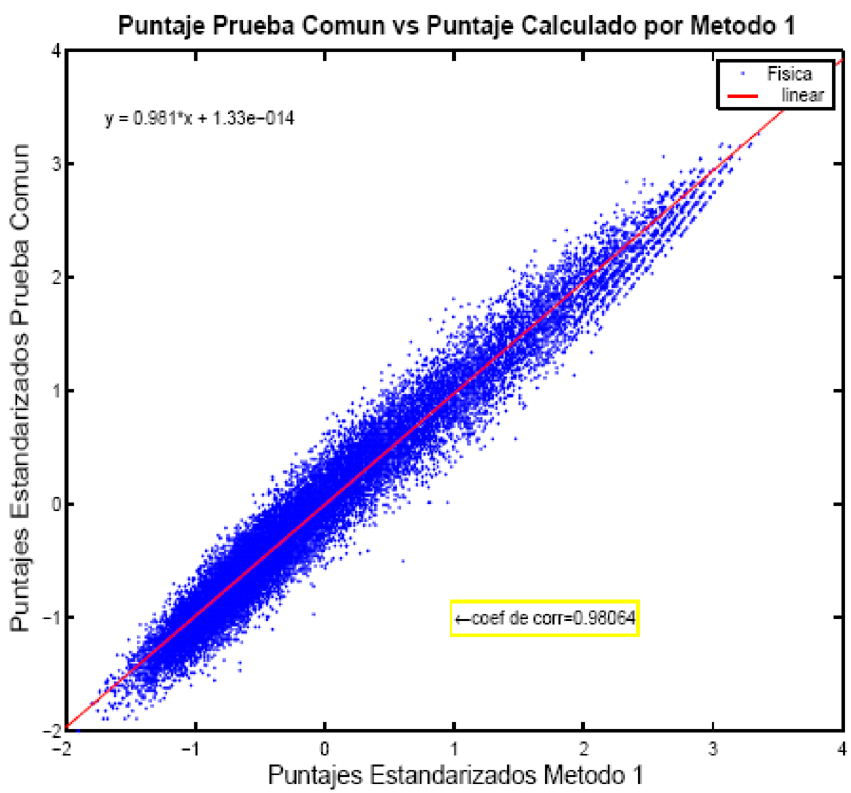
MN para Sist. de Ecs. Lineales:
1) Motivación 2: Mínimos Cuadrados

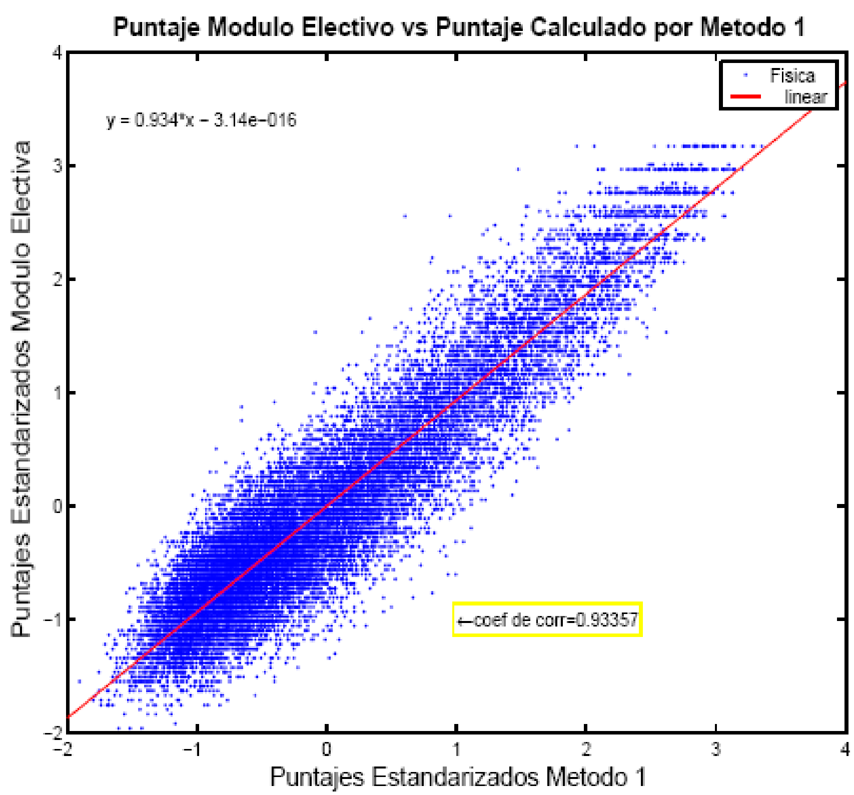


Dados *n puntos* (x_i , y_i)
Encontrar la recta que mejor los “representa”:

$$\min_{\beta_0,\beta_1} \sum_{k=1}^{n} \left[y_k - (\beta_0 + \beta_1 x_k) \right]^2$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
1) Motivación 2: Mínimos Cuadrados





MN para Sist. de Ecs. Lineales:

1) Motivación 2: Mínimos Cuadrados

- Sea $f \in \zeta[a,b]$. Se quiere determinar un polinomio $p_n(x)$ de grado n según MCC:

$$\boxed{\min_{p_n(x)} \varepsilon_T = \int_a^b \left[f(x) - p_n(x) \right]^2 dx}$$

$$\boxed{\delta_{ij} = \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}}$$

Matriz tipo Hilbert !

- Ecuaciones Normales:

coeficientes

$$\begin{bmatrix} \int_a^b x^0 dx & \int_a^b x^1 dx & \int_a^b x^2 dx & \cdots & \int_a^b x^n dx \\ \int_a^b x^1 dx & \int_a^b x^2 dx & \int_a^b x^3 dx & \cdots & \int_a^b x^{n+1} dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b x^n dx & \int_a^b x^{n+1} dx & \int_a^b x^{n+2} dx & \cdots & \int_a^b x^{2n} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b x^0 f(x) dx \\ \int_a^b x^1 f(x) dx \\ \vdots \\ \int_a^b x^n f(x) dx \end{bmatrix}$$

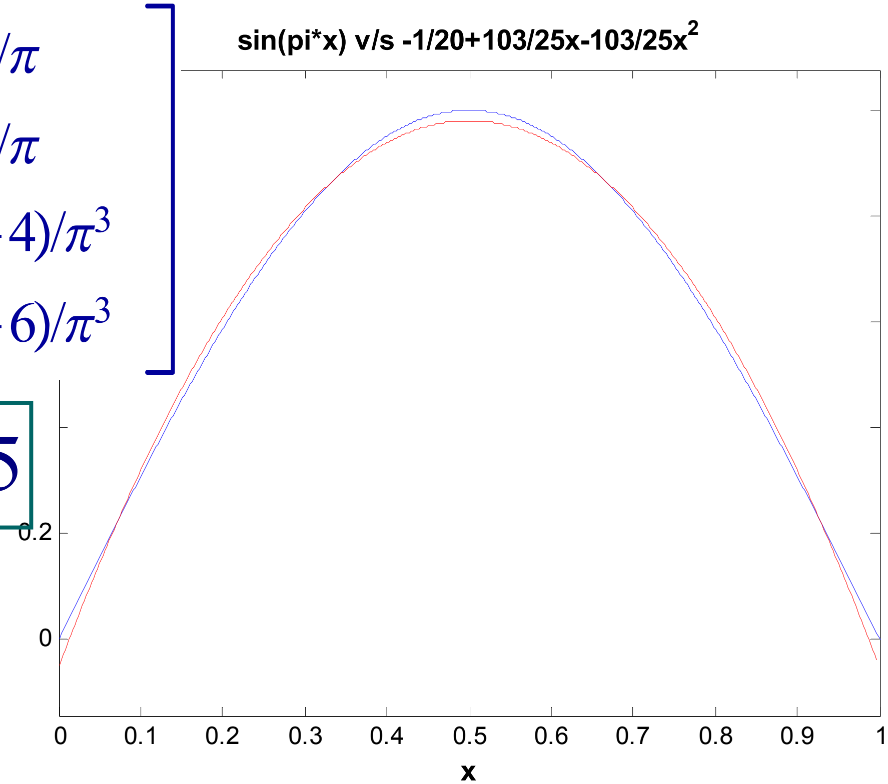
MN para Sist. de Ecs. Lineales:

1) Motivación 2: Mínimos Cuadrados

- Sea $f(x)=\sin(\pi x)$. Determinemos $p_3(x)$ polinomio de grado 3 según MC:

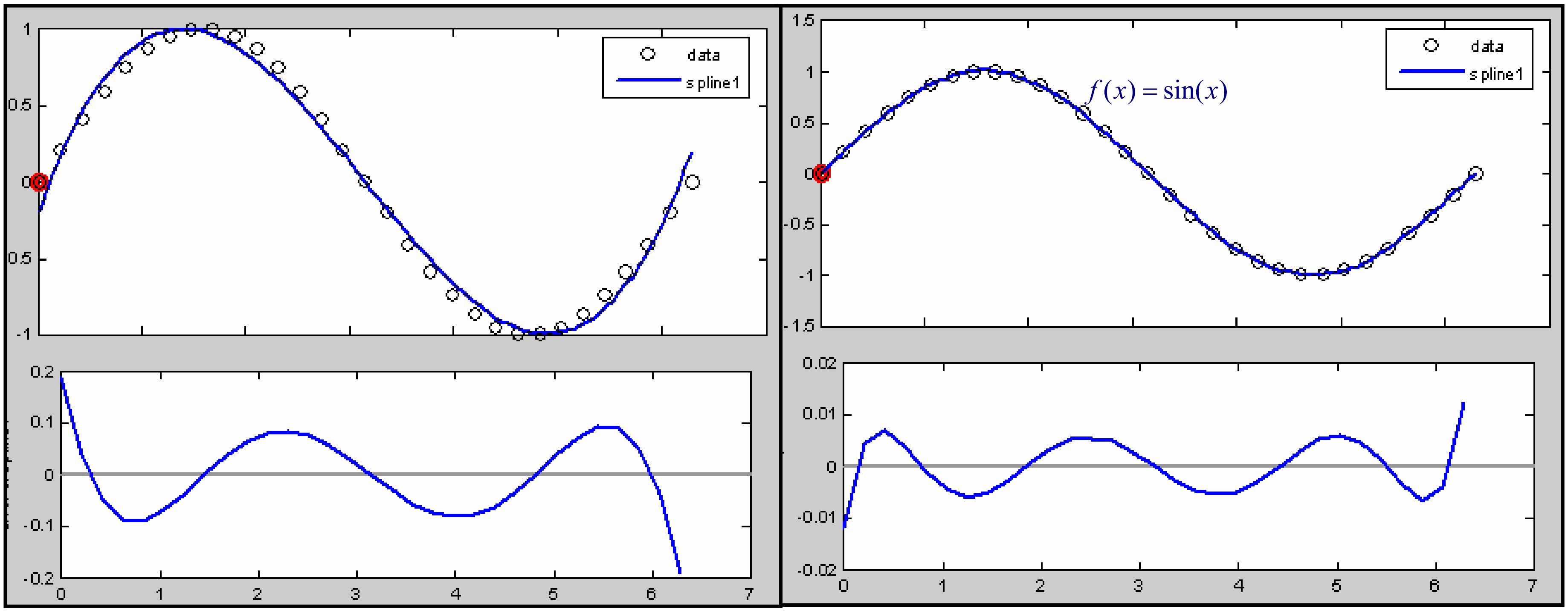
$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\pi \\ 1/\pi \\ (\pi^2-4)/\pi^3 \\ (\pi^2-6)/\pi^3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{p_3(x) = -4.12x^2 + 4.12x - 0.05}$$



MN para Sist. de Ecs. Lineales:
1) Motivación 2: Mínimos Cuadrados

Ejemplo 1:

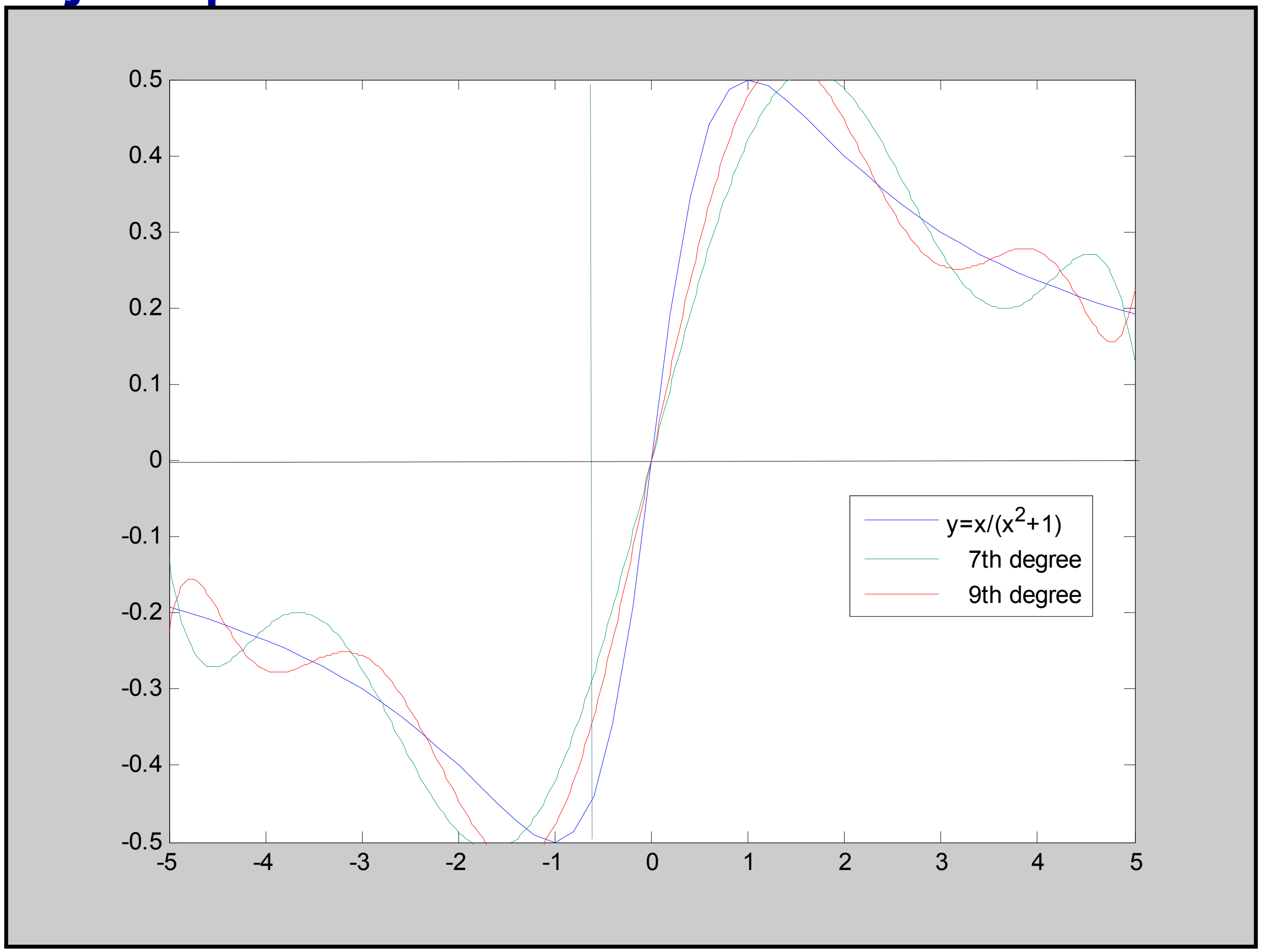


$$f(x) = \sin(x) \qquad p(x) = \sum_{k=0}^{5,6} a_k x_i^{\,k}$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

1) Motivación 2: Mínimos Cuadrados

Ejemplo 2:



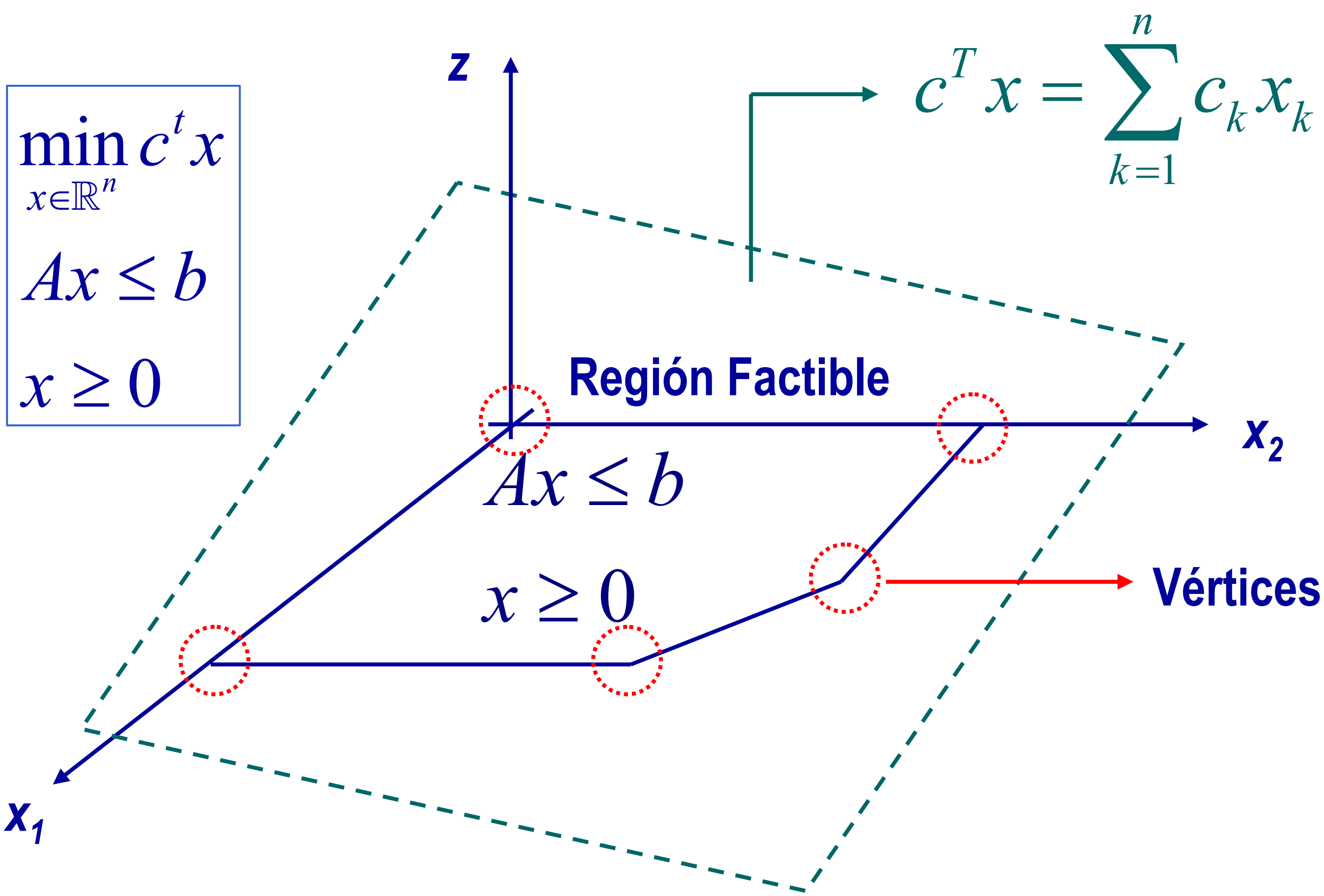
$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{7} a_k x_i^{\,k}$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{9} a_k x_i^{\,k}$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
1) Motivación 3: Programación Lineal

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} c^t x$$
$$Ax \le b$$
$$x \ge 0$$



MN para Sist. de Ecs. Lineales:
2) Defs. y Resultados Básicos 1

- Resolver un sistema de n ecuaciones lineales y n incógnitas consiste en determinar los valores de las variables: x_1 , x_2 , ... , x_n tales que, dados: $A = (a_{ij})$ y $b = (b_i)$ (i =1,...,n ; j =1,...,n) se satisfagan las ecuaciones: Ax = b

$$\vdots \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
2) Defs. y Resultados Básicos 2

- Todo SEL se puede resolver bien numéricamente ?
- Sea A $\in \Re^{m \times n}$ invertible y b $\in \Re^{m}$. Entonces es posible demostrar que si se perturba A o b se tiene:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \quad (1)$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad (2)$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
2) Defs. y Resultados Básicos 3

- La norma de C $\in \Re^{m \times n}$ se define según:

$$\|C\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n}\left\{\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\right\} = \max_{i=1,\ldots,n}\left\{\sum_{j=1}^{n}|c_{1j}|,\ldots,\sum_{j=1}^{n}|c_{nj}|\right\}$$

- Se define el número de condicionamiento* de A según:

$$\boxed{cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty}$$

- Se tiene que: cond (A) $\geq$ 1.

*Revisar cálculo del cond(A) en Matlab

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
2) Defs. y Resultados Básicos 4

- Veamos un ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0.550 & 0.423 \\ 0.484 & 0.372 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0.127 \\ 0.112 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A+\delta A = \begin{pmatrix} 0.550 & 0.423 \\ 0.483 & 0.372 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0.127 \\ 0.112 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad x' = \begin{pmatrix} -0.4536 \\ 0.89 \end{pmatrix}$$

- Se tiene: cond(A) = $0.973 \times 7833.3 = 7621.8$!!!
- El sistema es mejor condicionado si se tiene que cond (A) esta cerca de 1 (Mat. de Hilbert)

MN para Sist. de Ecs. Lineales
3) Método de Gauss 1

Método de Gauss sin Anulación de Pivote:

- Parte 1: Eliminación de variables bajo la diagonal en las ecuaciones mediante operaciones elementales:

  →Multiplicar una ecuación por un real

  →Sumar dos ecuaciones

  Se entonces producen ceros bajo la diagonal.
- Parte 2: Sustitución backward de las variables en las ecuaciones

MN para Sist. de Ecs. Lineales
3) Método de Gauss 2

Sustitución Backwards:

$$x_n = \frac{u_{n(n+1)}}{u_{nn}}$$

$$x_k = \frac{1}{u_{kk}}\left(u_{k(n+1)} - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj}x_j\right) \quad k = (n-1),\ldots,1$$

Veamos un ejemplo.

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
3) Método de Gauss 3
Estrategias de Pivoteo

- En la iteración k de la primera etapa del método de Gauss es posible que el pivote a^k_{ii} (elementos de la diagonal de la ecuación i) se anule. En este caso se permuta la ecuación i con la ecuación m de mayor pivote en módulo (pivoteo parcial):

$$| a^k_{mi} | \geq | a^k_{ji} | \quad \text{para todo } j = i+1,\ldots,n$$

- Investigue la estrategia de pivoteo completo

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
3) Método de Gauss 4: # de Ops

- Una medida de la eficiencia de un algoritmo es el tiempo que demora en ejecutarse, el cual es proporcional al número de operaciones aritméticas (ops)

$$\text{Ops\_Gauss}(n) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} (n - i)(2n - 2i + 6)}_{\text{Parte 1 } O(n^3)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (2i - 1)}_{\text{Parte 2 } O(n^2)}$$

$\pm , \times , \div$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
3) Método de Gauss - Jordan:

- El método de Gauss – Jordan consiste en aplicar 2 veces la primera parte del método de Gauss, es decir: triangularizar superior e inferiormente la matriz A

$$\text{Ops\_G-J}(n) = \left.\sum_{i=1}^{n-1} (n - i)(2n - 2i + 6)\right\} \begin{array}{l}\text{Parte 1}\\ O(n^3)\end{array}$$

$$+$$

$$\left.\sum_{i=1}^{n-1} 4i + n \right\} \begin{array}{l}\text{Parte 2}\\ O(n^2)\end{array}$$

$\pm, \times, \div$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
4) Análisis de Error del M. de Gauss:

- Es posible hacer un análisis de propagación de errores, que se obtienen al realizar las operaciones aritméticas de la primera y segunda etapa del método de Gauss o Gauss – Jordan
- Se demuestra que esta propagación de errores disminuye si se utiliza alguna técnica de pivoteo (parcial o completo)

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
5) Matriz Inversa y Determinante 1:

- Matriz inversa A: Se aplica el método de Gauss – Jordan al SEL aumentado con las columnas de la matriz identidad

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
5) Matriz Inversa y Determinante 2:

- El det(A) se puede definir recursivamente mediante la fórmula de Laplace:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Fórmula válida para cualquier fila i o columna j

Matriz Cofactor ij de A Se obtiene eliminando fila i y columna j

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
5) Matriz Inversa y Determinante 3:

Propiedades del Determinante:

a) Si todos los coeficientes de una fila o columna de A son ceros $\Rightarrow$ det(A) = 0

b) Si dos o más filas o columnas de A son linealmente dependientes $\Rightarrow$ det(A) = 0

c) Si se reemplaza la fila i (F_i) por la fila j (F_j) donde $i \neq j$ entonces $\Rightarrow$ det(A') = -det(A)

d) Si se reemplaza la fila i (F_i) por ($F_i + \lambda F_j$) donde $i \neq j$ entonces $\Rightarrow$ det(A') = det(A)

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
5) Matriz Inversa y Determinante 4:

Propiedades del Determinante:

e) Si A y B son dos matrices cuadradas de igual tamaño: det(AB) = det(A)det(B)

f) $\det(A^t) = \det(A)$

g) Si A es invertible: $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

h) Si A es una matriz triangular inferior, superior o diagonal:

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
5) Matriz Inversa y Determinante 5:

- Para calcular el det(A) se aplica el método de Gauss y la descomposición A = LU:
- Efectivamente, si se puede triangularizar la matriz A, entonces:

$$PA = LU \Rightarrow \det(A) = \det(P^T LU)$$

$$\det(A) = \det(P^T)\det(L)\det(U) = \det(P^T)\det(U)$$

$$\det(U) = \prod_{k=1}^{n} u_{kk}$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

6) Factorización de Matrices 1: A=LU

- Descomposición A = LU (Alg. Gauss)

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}}_{L}
\underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n-1} & u_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & u_{n-1n-1} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}}_{U}
$$

$$A = LU$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
6) Factorización de Matrices 2: Crout

- Una matriz A cuadrada es tridiagonal si sus coeficientes no nulos se ubican en las diagonales principal y secundarias

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

6) Factorización de Matrices 3: Crout

- Una matriz A cuadrada tridiagonal puede ser factorizada según A=LU donde:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & l_{44} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & l_{nn-1} & l_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{L}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{U}}$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

6) Factorización de Matrices 4: Crout

- Método de Crout para matrices tridiagonales:

Paso 1:
$$l_{11} = a_{11}$$
$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}$$

Paso 2: Para i=2,…,n-1
$$l_{i(i-1)} = a_{i(i-1)}$$
$$l_{ii} = a_{ii} - l_{i(i-1)}u_{(i-1)i}$$
$$u_{i(i+1)} = \frac{a_{i(i+1)}}{l_{ii}}$$

Paso 3:
$$l_{n(n-1)} = a_{n(n-1)}$$
$$l_{nn} = a_{nn} - l_{n(n-1)}u_{(n-1)n}$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
6) Fact. de Matrices 5: Cholesky

- Una matriz cuadrada A es definida positiva si y solo si: $x^t A x > 0$ para todo $x \in \Re^n$
- Teorema: Si A es definida positiva:

a) $\det(A) \neq 0$

b) $a_{kk} > 0$ para todo $k=1,\ldots,n$

c) $\max_{1\le k,j\le n} |a_{kj}| \le \max_{1\le k\le n} |a_{kk}|$

d) $(a_{ij})^2 < a_{ii} a_{jj} \quad \forall i \neq j$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
6) Fact. de Matrices 6: Cholesky

- Teorema: A es definida positiva si y solo si los determinantes de las matrices cofactores principales son positivos: $\det(A_{kk}) > 0$ para todo $k=1,\ldots,n$.

$$A_{kk} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \longleftarrow \text{Matriz cofactor principal } k$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
6) Fact. de Matrices 7: Cholesky

- Teorema: A es definida positiva si y solo si puede factorizarse como $A = LL^T$ donde L es una matriz triangular inferior con $l_{ii} > 0$ para todo i=1,…,n.
- En este caso para resolver un SEL $Ax = b$ se debe aplicar la sustitución forward - backward

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
6) Fact. de Matrices 8: Met. Cholesky

Paso 1: $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$

Paso 2: Para j=2,…,n $l_{j1} = a_{j1}/l_{11}$

Paso 3: Para i=2,…,n-1 $l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 \right)^{1/2}$

Para j=(i+1),…,n $l_{ji} = \dfrac{\left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik} \right)}{l_{ii}}$

Paso 4: $l_{nn} = \left(a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}^2 \right)^{1/2}$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

6) Fact. Matrices 9: Ortogonalización

- Factorización QR:

  $A = QR$

  Q matriz ortogonal: $Q^tQ = I$ (Gram-Schmidt)

  $R = Q^tA$

- Factorización SVD:

  $A_{nxm} = USV^t$

  U_{nxn} , V_{mxm} matrices ortogonales

  S_{nxm} matriz valores singulares (raíz v.p. A^t*A)

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
7) Métodos Iterativos para SEL 1:

Métodos Iterativos:

$$x^{(0)} \in \Re^n$$

$$x^{(k+1)} = F(x^{(k)}) \quad \forall\, k \geq 0$$

Los métodos para SEL son de la forma:

$$F(x^{(k)}) = Bx^{(k)} + h$$

donde $B \in \Re^{n\times n}$, $h \in \Re^n$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
7) Métodos Iterativos para SEL 2:

- En general se construyen B y h de la siguiente forma:

  Sean M y N $\in \mathfrak{R}^{n\times n}$ tales que:

  M es invertible y $A = M - N$

  Entonces:

  $$Ax = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

- Esto sugiere definir:

  $$B = M^{-1}N \quad y \quad h = M^{-1}b$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
7) Métodos Iterativos para SEL 3:

- Luego, si descomponemos $A = (a_{ij})$ invertible según:

$$A = \text{diag}(A) + \text{low}(A) + \text{up}(A)$$

- Donde $\text{diag}(A)$, $\text{low}(A)$, $\text{up}(A) \in \Re^{n\times n}$ se definen según:

$$\text{diag}(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
7) Métodos Iterativos para SEL 4:

$$\mathrm{low}(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i \leq j \end{cases}$$

$$\mathrm{up}(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

- En base a estas definiciones se tienen los métodos de Jacobi y Gauss - Seidel

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 5:

- **Jacobi**: define M y N según:

$$M = \text{diag}(A)$$

$$N = -[\text{low}(A) + \text{up}(A)]$$

$$B = -\,\text{diag}(A)^{-1}\,[\text{low}(A) + \text{up}(A)]$$

$$h = \text{diag}(A)^{-1}\,b$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 6:

- Si $x^{(k)} = (x_i^{(k)})$ i = 1,…,n es el vector de la iteración k del método de Jacobi, entonces satisface la siguiente fórmula iterativa:

$$\boxed{x_i^{(k)} = \frac{\left(-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i\right)}{a_{ii}}} \quad 1 \leq i \leq n, k = 1,2,3\ldots$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 7:

- Gauss - Seidel: define M y N según

$$M = [\mathrm{diag}(A) + \mathrm{low}(A)] \qquad N = -\,\mathrm{up}(A)$$

$$B = -\,[\mathrm{diag}(A) + \mathrm{low}(A)]^{-1}\,[\mathrm{up}(A)]$$

$$h = [\mathrm{diag}(A) + \mathrm{low}(A)]^{-1}\,b$$

- J y G-S convergen $\forall x^0$ si A es estrictamente diagonal dominante:

$$\boxed{|a_{kk}| > \sum_{j=1,j\neq k}^{n} |a_{kj}| \quad \forall k = 1,\ldots,n}$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
7) Métodos Iterativos para SEL 8:

- Si $x^{(k)} = (x_i^{(k)})$ i = 1,…,n es el vector de la iteración k del método de Gauss-Seidel, satisface la siguiente fórmula iterativa:

$$x_i^{(k)} = \frac{\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i \right)}{a_{ii}} \qquad 1 \le i \le n, \quad k = 1, 2, 3 \ldots$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
7) Métodos Iterativos para SEL 9:

- Si $x^{(k)} = (x_i^{(k)})$ i = 1,…,n es el vector de la iteración k del método de SOR, satisface la siguiente fórmula iterativa:

$$x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \omega \frac{\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i \right)}{a_{ii}}$$

$$1 \leq i \leq n, k = 1,2,3\ldots$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
7) Métodos Iterativos para SEL 10:

- Para matrices tridiagonales y definidas positivas, el valor óptimo de ω está dado por la fórmula:

$$\boxed{\overline{\omega} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(T)}}}$$

- Donde:

$$T_J = -[Diag(A)]^{-1}(Low(A)+Up(A))$$

$$T_G = -[Diag(A)+Low(A)]^{-1}Up(A)$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
7) Métodos Iterativos para SEL 11:

- Si A es definida positiva, el método del gradiente conjugado está dado por:

$$\boxed{\min_{x\in\mathbb{R}^n} q(x) = \tfrac{1}{2} x^t A x - x^t b \Leftrightarrow Ax = b}$$

Paso 0: $x^0 \in \mathbb{R}^n, g^0 = Ax^0 - b, d^0 = -g^0$

Paso 1: $\alpha^k = -\dfrac{(g^k)^t d^k}{(d^k)^t A d^k}$

Paso 2: $x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 12:

- Método del gradiente conjugado:

  Paso 3: $g^{k+1} = Ax^{k+1} - b$

  Paso 4: $\beta^k = \dfrac{(g^{k+1})^t A d^k}{(d^k)^t A d^k}$

  Paso 5: $d^{k+1} = -g^{k+1} + \beta^k d^k$

- Si no hay errores de redondeo el método del gradiente conjugado converge en a lo más n iteraciones.

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
7) Métodos Iterativos para SEL 13:

Análisis de Error de los Métodos Iterativos

- Es posible hacer un análisis de propagación de errores que se obtienen al realizar las operaciones aritméticas de las iteraciones del método de Jacobi y Gauss – Seidel
- Si $x^{(k)}$ es la iteración k de J o G-S y Ax = b:

$$\frac{\left\| x - x^{(k)} \right\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A\| \left\| A^{-1} \right\|}_{\text{cond(A)}} \frac{\left\| b - Ax^{(k)} \right\|}{\|b\|}$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
7) Métodos Iterativos para SEL 14:

- Si A es una matriz cuadrada, el polinomio en λ definido por:

$$\boxed{p(\lambda) = \det(A - \lambda I)}$$

  es el polinomio característico de A

- El polinomio p es de grado n y tiene a lo más n raíces distintas (complejas). Estas raíces de p se denominan valores propios de A.

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
7) Métodos Iterativos para SEL 15:

- Definición: El radio espectral de A: $\rho(A)$ se define como:

$$\boxed{\rho(A) = \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i|}$$

donde λ_i es un valor propio de A

- Proposición: Si A es una matriz cuadrada:

a) $\| A \|_2 = \rho(A^t A)^{1/2}$

b) $\rho(A) \leq \| A \|$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 16:

- La relación entre métodos iterativos para SEL y valores propios la establece los siguientes resultados:
- Proposición: Si x^k es la iteración k de un método iterativo para un SEL que tiene la forma:

$$\boxed{x^{k+1} = Tx^k + c \quad y \quad Ax = b}$$

Entonces:

Para $k \to \infty$ $$\boxed{\| x^k - x \| \approx \rho(T)^k \| x^0 - x \|}$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:
7) Métodos Iterativos para SEL 17:

- Proposición: Si x^k es la iteración k de un método iterativo para un SEL que tiene la forma:

$$x^{k+1} = Tx^k + c \quad y \quad Ax = b$$

  Entonces: $x^k \to x$ ssi $\rho(T) < 1$

- Proposición: Si los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen se tiene que:

$$0 \leq \rho(T_{GS}) < \rho(T_J) < 1$$

Bibliografía

1) R. Burden & J. D. Faires, Análisis Numérico, Séptima Edición, Thomson Learning, 2002.
2) J. Stoer & R. Burlisch, Introduction to Numerical Analysis, Second Edition, Springer, 1992.
3) G. Hernández O.: Apuntes de Cálculo Numérico 2007