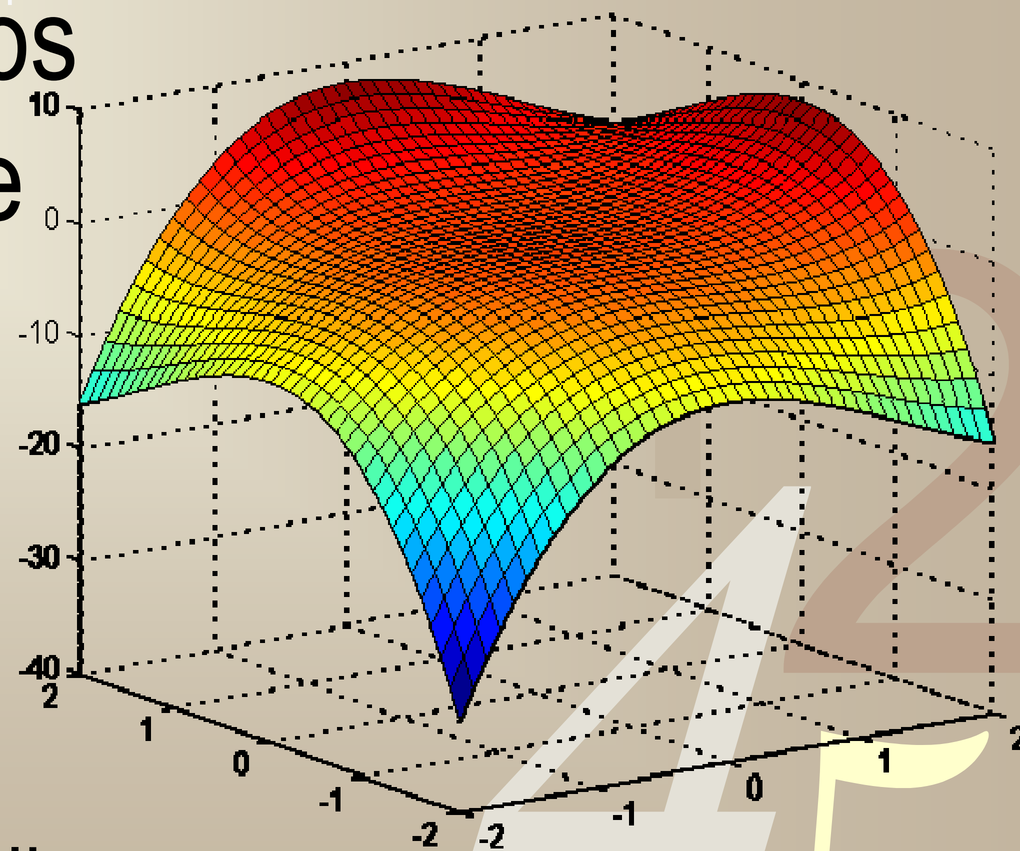
Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Matemática

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Métodos Numéricos para Sistemas de Ecuaciones No Lineales



MA-33A

Gonzalo Hernández Oliva

Sistemas de Ecuaciones No Lineales: SENL

1) Motivación: Modelación y Optimización No-Lineal Con Restricciones
2) Introducción
3) Métodos Numéricos para SENL: $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$
4) En $\mathbb{R}$: Punto Fijo, Bisección y Newton-Raphson
5) En $\mathbb{R}^n$: Newton-Kantorovich y Punto Fijo
6) Métodos Optimización Con Restricciones
7) Bibliografía

Motivación: Modelación en Optimización Planificación de Producción (Básico)

- El plan de producción de un producto considera 6 etapas, cada una de 2 meses. Los datos necesarios para determinar este plan se muestran en la siguiente tabla.
- Los costos de producción involucran todo lo relacionado a la producción, salvo los costos de almacenamiento que son 2 [$/ton] de etapa en etapa. En la etapa 1 hay 500 [ton] de producto en bodega y se quiere terminar el año con la misma cantidad en bodega.
- Encuentre un modelo lineal que maximice ingresos, verificando restricciones de capacidad y de inventario en la etapa final del programa.

Motivación: Modelación en Optimización
Planificación de Producción (Básico)

Etapa	Costos de Producción [$/ton]	Capacidad de Producción [ton]	Demanda Estimada [ton]	Precio Venta Estimado [$/ton]
1	20	1500	1100	180
2	25	2000	1500	180
3	30	2200	1800	250
4	40	3000	1600	270
5	50	2700	2300	300
6	60	2500	2500	320

Motivación: Modelación en Optimización
Producción bajo Restricciones Ambientales

- La calidad del aire de una región industrial depende en gran parte de las evaporaciones de las n plantas existentes, que pueden usar m tipos de combustibles:
- Sea E_j la energía total que necesita la planta j y e_{ij} la evaporación producida por unidad de combustible tipo i en la planta j.
- Sea c_i el costo unitario del combustible tipo i, que produce una cantidad f_{ij} de energía en la planta j.
- El nivel de contaminación del aire en la región no debe exceder p microgramos de partículas por m^3, y supongamos que conocemos un parámetro g_j que relaciona la evaporación en la planta j con la generación de partículas.
- Obtenga un modelo lineal que determine la mezcla de combustibles óptima que debe utilizarse en cada planta de tal manera de minimizar costos, verificar niveles de contaminación máxima y satisfacer los requerimientos energéticos.

Motivación: Modelación en Optimización
Planificación de Producción (No-lineal)

- Una compañía produce un producto para satisfacer una demanda conocida en T períodos. La producción se puede hacer con fuerza laboral estable o temporal. Las variables del modelo son: cantidad de producto producido (proporcional a fuerza laboral), nivel de inventario y cantidad de fuerza laboral temporal. La función objetivo y restricciones consideran:
  a) Función Objetivo: Costos de producción (fuerza laboral estable), inventario y de trabajo temporal (Para evitar fluctuaciones, el costo es proporcional al cuadrado de la diferencia en la fuerza de trabajo temporal entre dos períodos sucesivos)
  b) Restricciones: Balance de demanda y capacidad máxima de producción, inventario inicial y final
- Obtenga un modelo matemático que determine la programación de la producción.

Motivación: Modelación en Optimización
Ejecución de Tareas en Clusters de PC

- Un número n de tareas deben ser ejecutadas en un cluster de p computadores de capacidad u_i (i=1,...,p), medida en [mops].
- Estos computadores están conectados por redes de comunicación cuyos costos fijo y variable de instalación son f [$] y h [$/mbit].
- Las tareas poseen un requerimiento de mops dado por α_j (j=1,...,n) y generan un tráfico de información β_{kj} [mbit] entre ellas cuando se ejecutan en computadores diferentes.
- Sea c_i el costo de utilizar el computador i y d_{ij} el costo de ejecutar la tarea j en el computador i
- Obtenga un modelo que determine cuáles computadores deben ser utilizados y en cuál de ellos se ejecuta cada tarea, minimizando costos de flujos de información entre computadores, de utilización de computadores y de ejecución de tareas, respetando sus capacidades.

Motivación: Optimización No-Lineal Restringida

Métodos Numéricos:

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Programación Lineal

- Mínimos Globales
- Simplex y Punto Interior: **Complejidad Polinomial**
- SEL

Programación No - Lineal

- Mínimos Locales
- Métodos 1^{er} y 2^{o} Orden **Complejidad NP**
- Métodos Cuasi-Newton
- SENL

SENL: Introducción

Problema: Dadas n funciones no-lineales $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables, encontrar $\overline{x} = (\overline{x}_i)_{i=1,\ldots,n}$ solución del sistema de ecuaciones:

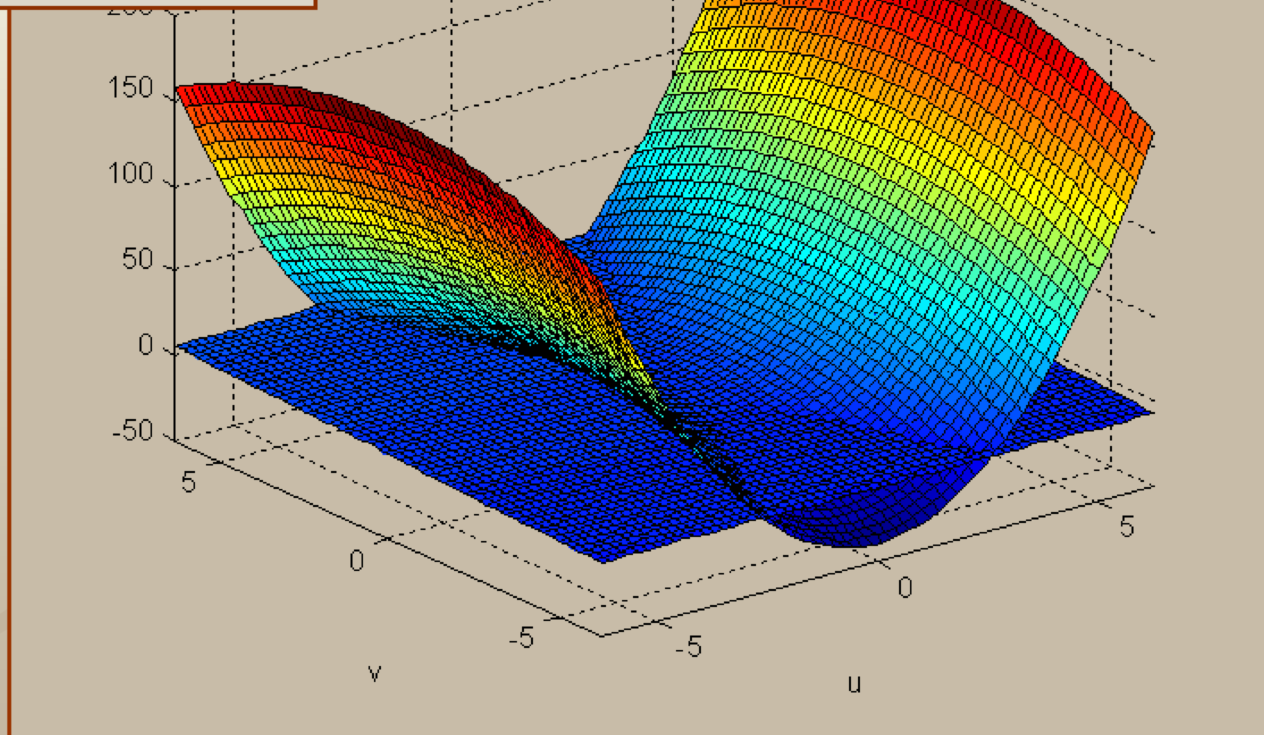
$$\boxed{\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \quad\quad\vdots \quad\quad\quad \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{array}}$$

SENL: Introducción

Ejemplo SENL:

$$5x^2{}_1 - x_2{}^2 = 0$$

$$x_2 + 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0$$



SENL: Introducción

Ejemplos SENL:

$$\begin{aligned} -x_1^2 - x_1 + 2x_2 - 18 &= 0 \\ (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 6)^2 - 25 &= 0 \end{aligned} \qquad x^0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\ln(x_1^{\,2} + x_2^{\,2}) - \sin(x_1 x_2) - \ln(2\pi) = 0 \\ &e^{(x_1 - x_2)} + \cos(x_1 x_2) = 0 \end{aligned} \qquad x^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_1^2 x_2 - x_1 x_3 + 6 &= 0 \\ 9x_2 + \sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} + 0.9 &= 0 \\ 60x_3 + 3e^{-x_1 x_2} + 10\pi - 3 &= 0 \end{aligned} \qquad x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \tfrac{1}{2} &= 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 &= 0 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \tfrac{10\pi - 3}{3} &= 0 \end{aligned} \qquad x^0 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

Métodos Numéricos para SENL

- Una Dimensión: $\mathbb{R}$
  - Punto Fijo
  - Bisección
  - Secante
  - Newton
- Varias Dimensiones: $\mathbb{R}^n$
  - Punto Fijo
    - Conv. Global
    - Vel. Lineal
  - Primer Orden
    - Conv. Global
    - Vel. Lineal
  - Newton
    - Conv. Local
    - Vel. Cuadrática
  - Cuasi - Newton
    - Conv. Global
    - Vel. Sup - Lin.

SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}$

Método de Punto Fijo

- Diremos que una función $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tiene un punto fijo en x_0 ssi:

$$\boxed{g(x_0)=x_0}$$

- El problema de punto fijo (pf) está relacionado con el problema de encontrar un cero:

Si x_0 es cero de $f \Rightarrow x_0$ es pf de $g(x)=x-f(x)$

Si x_0 es pf de $g \Rightarrow x_0$ es cero de $f(x)=x-g(x)$

SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}$

Método de Punto Fijo

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- Teorema: Sea g una función continua en [a,b]

a) Si $a \le g(x) \le b \Rightarrow$ g tiene un punto fijo en [a,b]

b) Si además g es derivable en (a,b) y $|g'(x)| \le 1$ para $x \in (a,b) \Rightarrow$ el punto fijo es único

- Método de Punto Fijo:

  Encontrar $x \in (a,b)$ tal que se cumple teo. anterior

  Iteración PF: $\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in (a,b) \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{array} \right\}$

Convergencia Global y Lineal

SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}$

Ejemplo Método de Punto Fijo

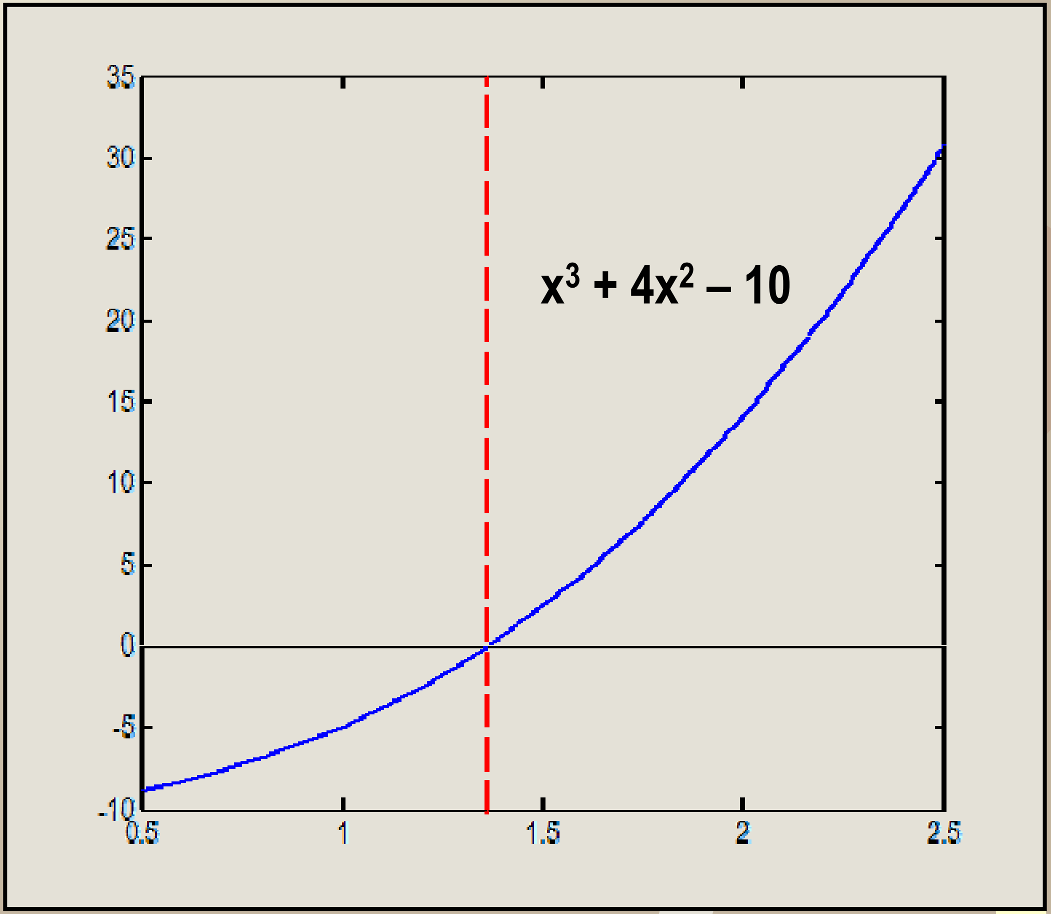
0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

La ecuación:

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

Tiene una raíz en [1,2].

Mediante el Método de Punto Fijo determinar esta raíz



SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}$

Ejemplo Método de Punto Fijo

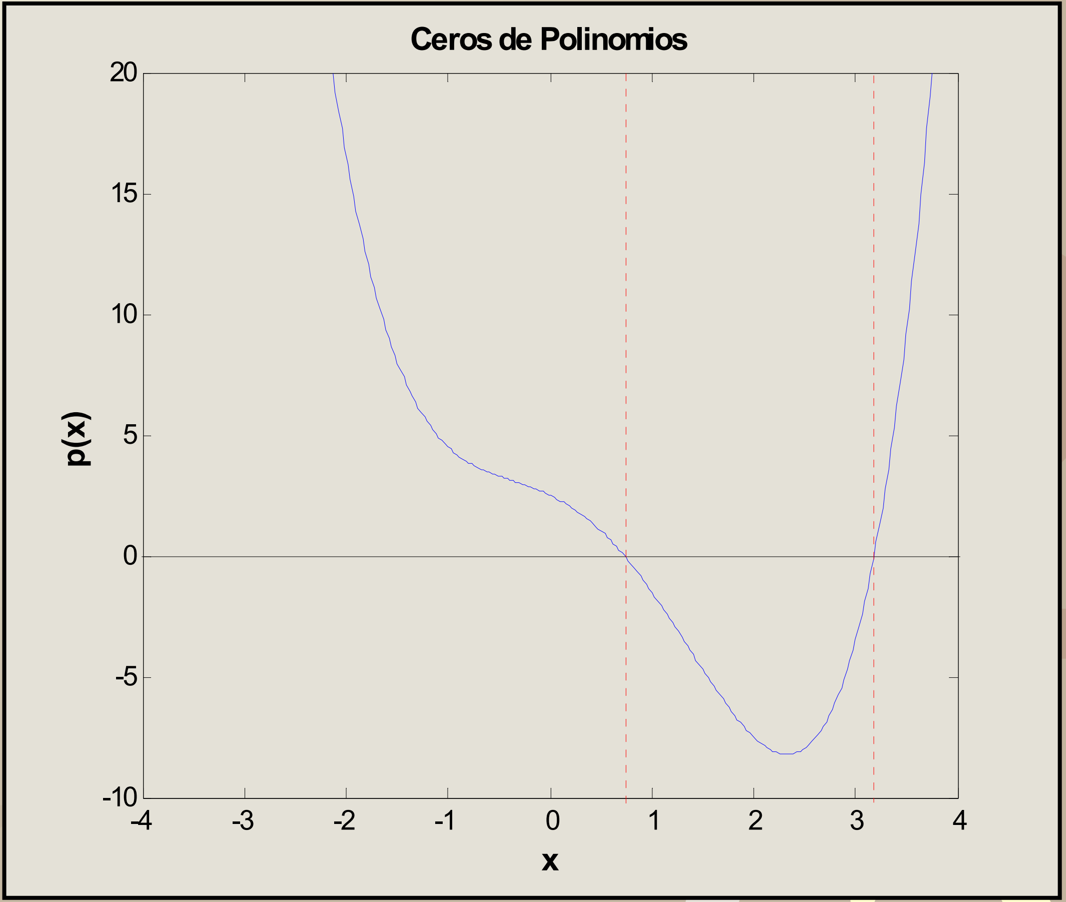
0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

La ecuación:

$$\frac{x^4}{2} - x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2} = 0$$

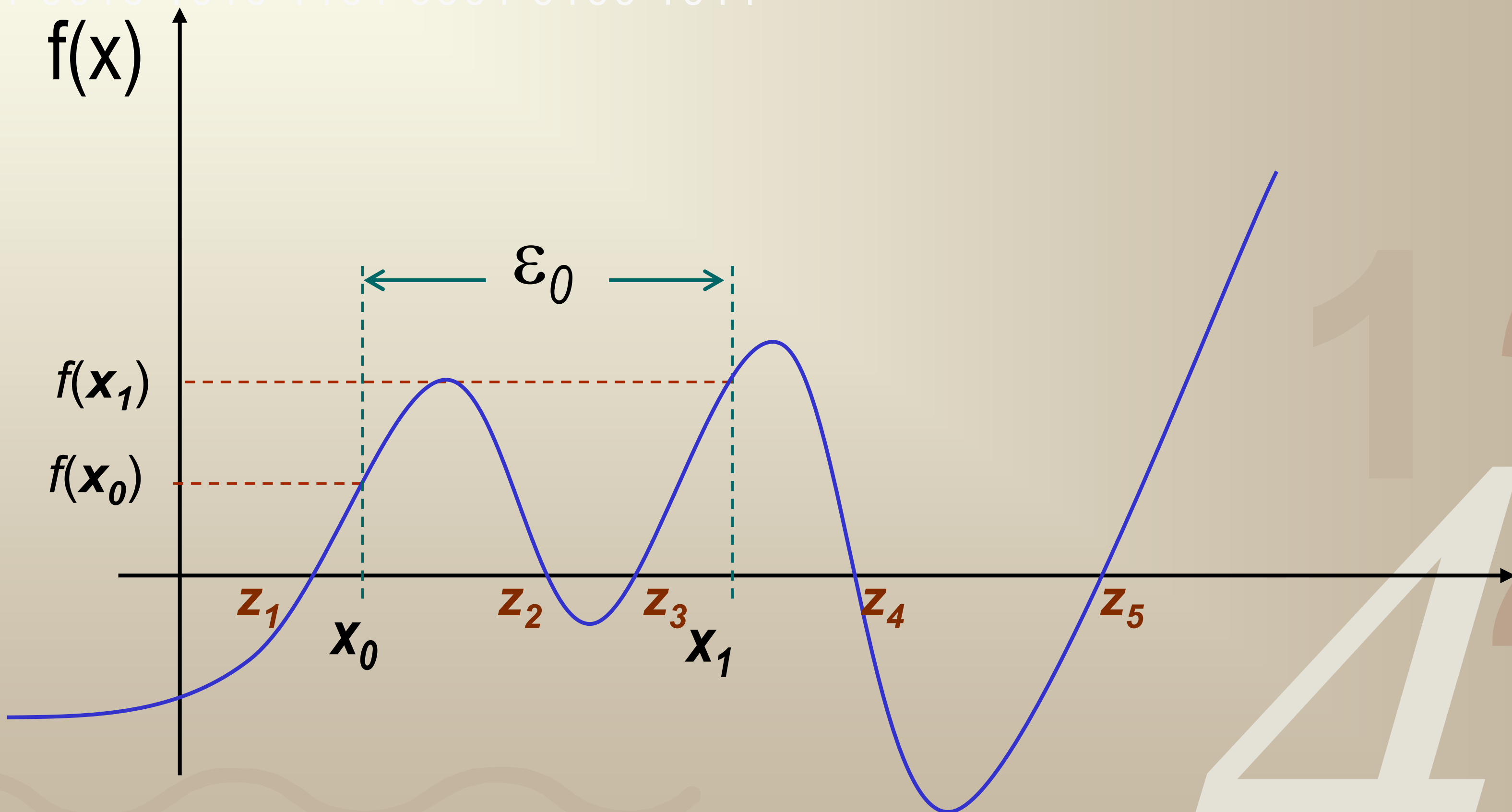
Tiene 2 raíces en [-4,4].

Mediante el Método de Punto Fijo determinar estas raíces



SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}$

Método de la Bisección



SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}$

Método de la Bisección

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- Dividir por la mitad el intervalo que contiene la raíz repetidamente, localizando en cada iteración la mitad que contiene la raíz

Convergencia Global y Lineal

- Sea ε_n el tamaño del intervalo *n*-és.

$$\boxed{\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n}{2} \Rightarrow \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_0}{2^n}}$$

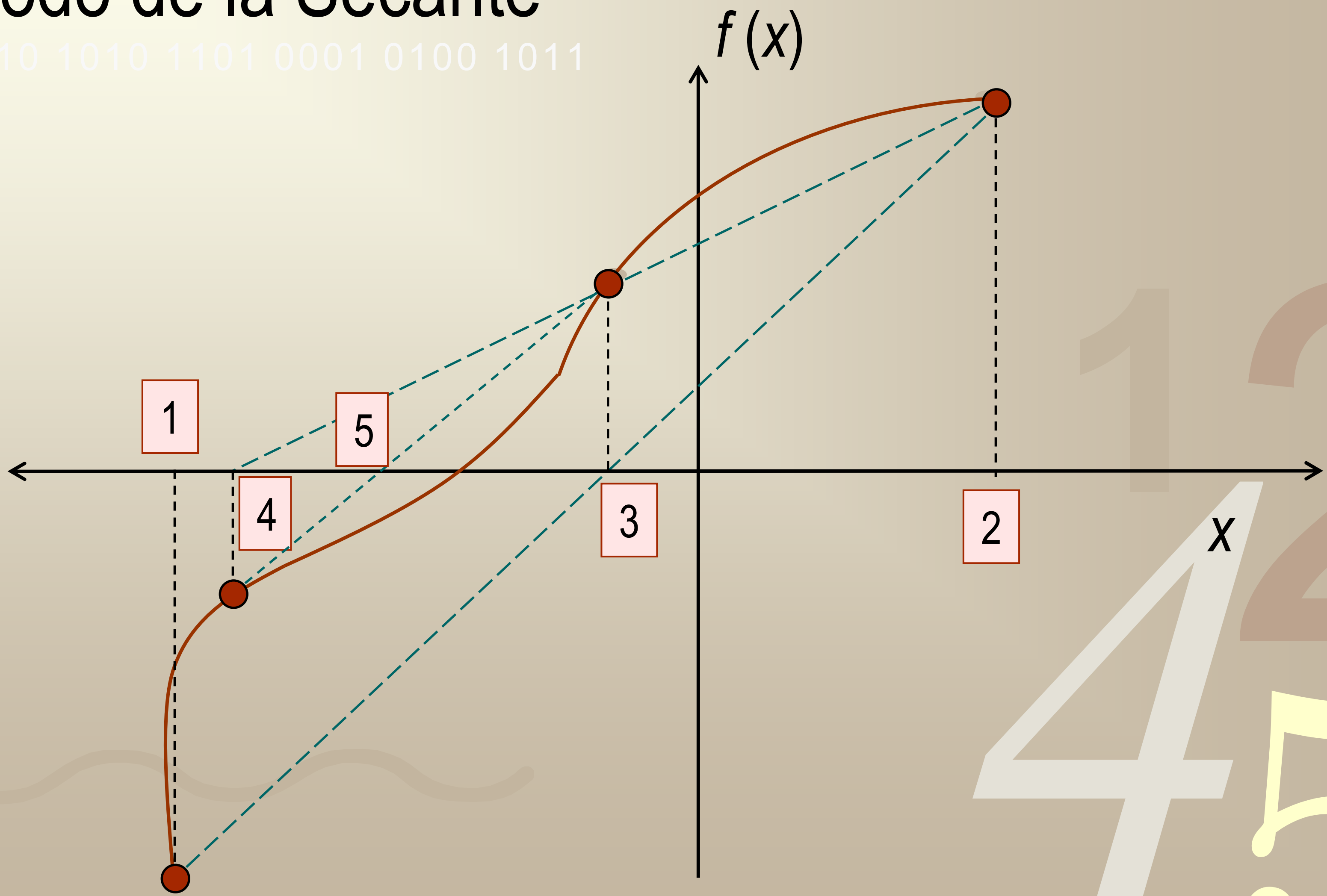
- Número de iteraciones: $n = \log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)$

Precisión Buscada

SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}$

Método de la Secante

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011



SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}$

Método de Newton - Raphson

Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suficientemente regular, el Teorema de Taylor asegura que:

$$\boxed{f(\overline{x}) = f(x) + f'(x)(\overline{x} - x) + \frac{f''(\xi(x))}{2}(\overline{x} - x)^2}$$

Si $|\overline{x} - x| \approx 0$ y $f(\overline{x}) = 0$

$$\boxed{\overline{x} = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}$

Método de Newton - Raphson

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Iteración del Método:

$x_0 \in \mathbb{R}$ cercano a $\overline{x}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Se calcula $f'(x_k)$ en forma exacta o aproximada según:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$\left| x_k - x_{k-1} \right| \le \varepsilon$$

SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}$

Método de Newton - Raphson

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- Teorema: Sea $f \in \zeta^2[a,b]$. Sea $\overline{x}$ tal que:

$$f(\overline{x}) = 0$$

$$f'(\overline{x}) \neq 0$$

Entonces existe δ > 0 tal que el método de Newton genera una sucesión $\{x_k\}^{\infty}{}_{k=1}$ que converge a $\overline{x}$ para cualquier $x_0 \in (\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta)$

SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}$

Método de Newton - Raphson

Propiedades Principales

- Convergencia Local:

$$\boxed{x_0 \in \left(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta\right)}$$

- Velocidad Cuadrática:

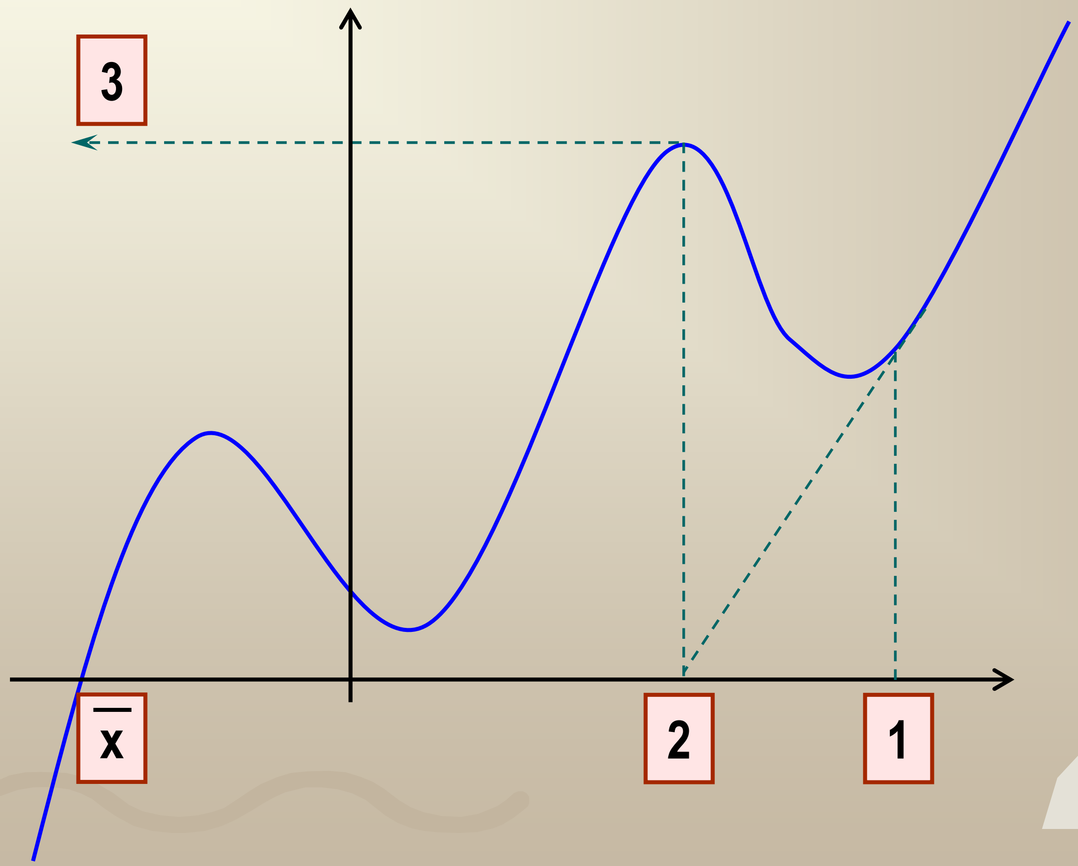
$$f(\bar{x}) = f(x_k) + f'(x_k)(\bar{x} - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(\bar{x} - x_k)^2$$

$$\boxed{\left|\bar{x} - x_{k+1}\right| = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}\left|\bar{x} - x_k\right|^2 \quad \xi \in (x_k, \bar{x})}$$

SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}$

Método de Newton – Raphson: Divergencia

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011



SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}^n$

Método de Punto Fijo

Un campo vectorial $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$x \rightarrow F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

formado por *n* campos escalares $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un punto fijo $\overline{x}$ en $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots [a_n, b_n]$ si:

$$\boxed{F(\overline{x}) = \overline{x}}$$

SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}^n$

Método de Punto Fijo

- Teorema: Sea F un campo vectorial continuo en D

a) Si $F(x) \in D \ \forall x \in D \Rightarrow$ F tiene un punto fijo en D

b) Si además F es derivable con continuidad en D y:

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \le \frac{K}{n} \quad \text{para } x \in D \text{ y } K < 1 \Rightarrow \text{el pf es único}$$

$$\forall i,j = 1,\ldots,n$$

- Método de Punto Fijo:

Convergencia Global
Velocidad Lineal

$\rightarrow$ Encontrar D tal que se cumple teorema anterior

$\rightarrow$ Sea $x_0 \in D$ $\quad x^{k+1} = F(x^k)$

SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}^n$

Método de Punto Fijo: Ejemplo

0011 0010 1010 1101

Revisar !!!

$$3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \tfrac{1}{2} = 0$$
$$x_1^{\,2} - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$
$$e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + (10\pi - 3) = 0$$

k	x_1	x_2	x_3	$\left\|x^k - x^{k-1}\right\|_\infty$
0	0.10000000	0.10000000	-0.10000000	-
1	0.49998333	0.0094115	-0.52310127	0.423
2	0.49999593	0.00002557	-0.52336331	9.4×10^{-3}
3	0.50000000	0.00001234	-0.52359814	2.3×10^{-4}
4	0.50000000	0.00000003	-0.52359847	1.2×10^{-5}
5	0.50000000	0.00000002	-0.52359877	3.1×10^{-7}

SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}^n$

Método de Newton – Kantorovich:

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Dado un campo vectorial $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$x \to F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

formado por *n* campos escalares $f_i:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ regulares. El Teorema de Taylor en $\mathbb{R}^n$ asegura que:

$$\boxed{f_i(y) = f_i(x) + \nabla f_i(x)^t (y-x) + \frac{1}{2}(y-x)^t \nabla^2 f(\xi(x))(y-x)}$$

SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}^n$

Método de Newton – Kantorovich:

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Para el campo vectorial F, se tiene entonces que:

$$F(y) = F(x) + \nabla F(x)(y - x) + O\left(\|y - x\|^2\right)$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} f_1(y) \\ \vdots \\ f_n(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{bmatrix} + O\left(\|y - x\|^2\right)}$$

SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}^n$

Método de Newton - Kantorovich

$$\boxed{\begin{array}{l} x^0 \in \mathbb{R}^n \ \text{ cercano a } \bar{x} \\[2ex] x^{k+1} = x^k - \left[\nabla F(x^k)\right]^{-1} F(x^k) \end{array}}$$

Donde: $\left[\nabla F(x)\right]_{ij} = \dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$

Sus propiedades son: $\begin{cases} \text{Convergencia Local} \\ \text{Velocidad Cuadrática} \\ \text{Inversión Matricial} \end{cases}$

SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}^n$

Método de Newton - Kantorovich: Ejemplo

Revisar !!!

$$3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \tfrac{1}{2} = 0$$

$$x_1^{\,2} - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$

$$e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + (10\pi - 3) = 0$$

k	x_1	x_2	x_3	$\left\Vert x^k - x^{k-1} \right\Vert_\infty$
0	0.10000000	0.10000000	-0.10000000	-
1	0.50003702	0.01946686	-0.52152047	0.423
2	0.50004593	0.00158859	-0.52355711	1.79×10^{-2}
3	0.50000034	0.00001244	-0.52359845	1.58×10^{-3}
4	0.50000000	0.00000000	-0.52359877	1.24×10^{-5}

SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}^n$

Método de Newton - Kantorovich: Más Ejemplos

1)
$$\begin{aligned} -x_1^2 - x_1 + 2x_2 - 18 &= 0 \\ (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 6)^2 - 25 &= 0 \end{aligned} \qquad x^0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

2)
$$\begin{aligned} \ln(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1 x_2) - \ln(2\pi) &= 0 \\ e^{x_1 - x_2} + \cos x_1 x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad x^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3)
$$\begin{aligned} x_1^3 + x_1^2 x_2 - x_1 x_3 + 6 &= 0 \\ 9x_2 + \sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} + 0.9 &= 0 \\ 60x_3 + 3e^{-x_1 x_2} + 10\pi - 3 &= 0 \end{aligned} \qquad x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4)
$$\begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \tfrac{1}{2} &= 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 &= 0 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + (10\pi - 3) &= 0 \end{aligned} \qquad x^0 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

SENL: Métodos Numéricos en $\mathbb{R}^n$

Métodos de Optimización Sin Restricciones:

- Se pueden aplicar los métodos de optimización sin restricciones a la búsqueda de ceros de campos vectoriales.
- En efecto, se tiene que:

El vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ verifica: $f_k(x) = 0 \ \forall k = 1, \ldots, n$

ssi soluciona el problema de optimización no lineal:

$$\boxed{\min_{x_1,\ldots,x_n} \sum_{k=1}^{n} \left[f_k(x_1,\ldots,x_n) \right]^2}$$

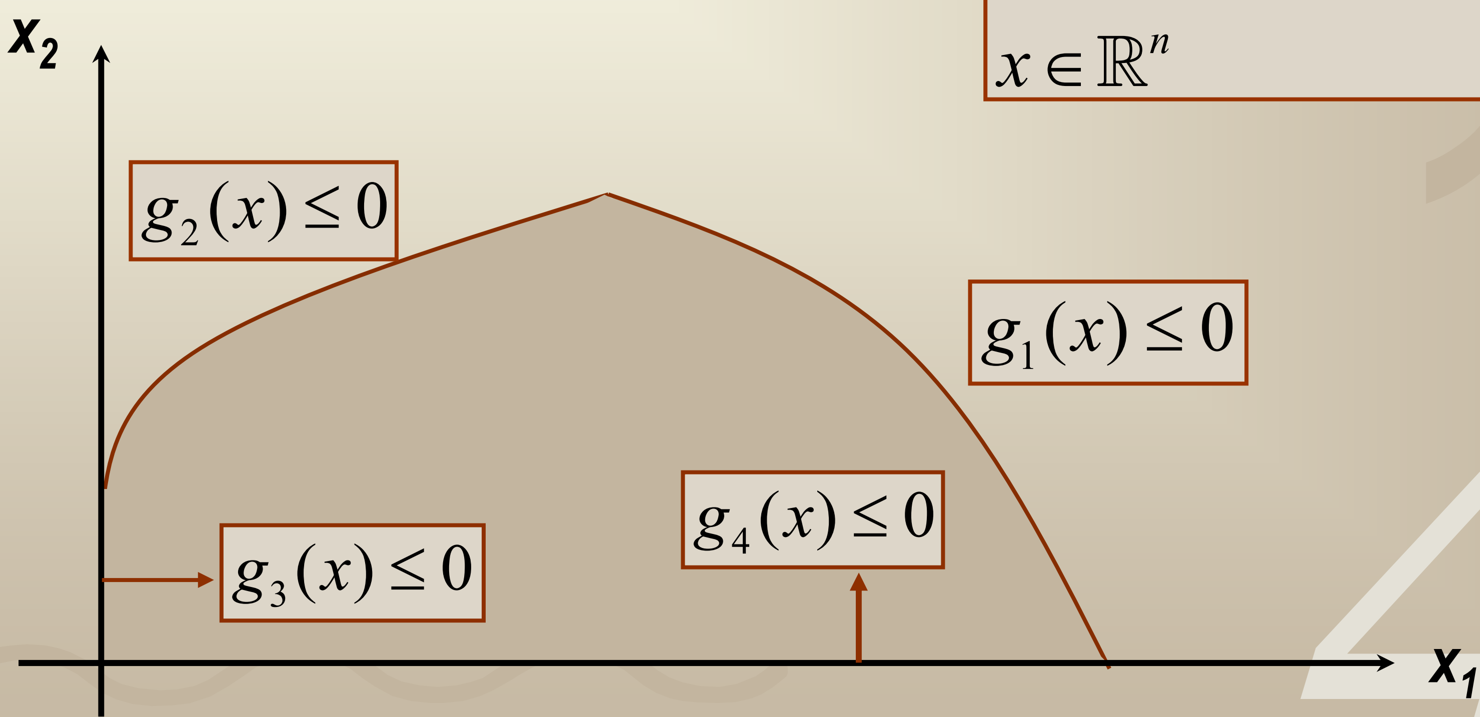
SENL: Optimización Con Restricciones: Teoría

Programación No - Lineal

$$\min_{s.a.} f(x)$$

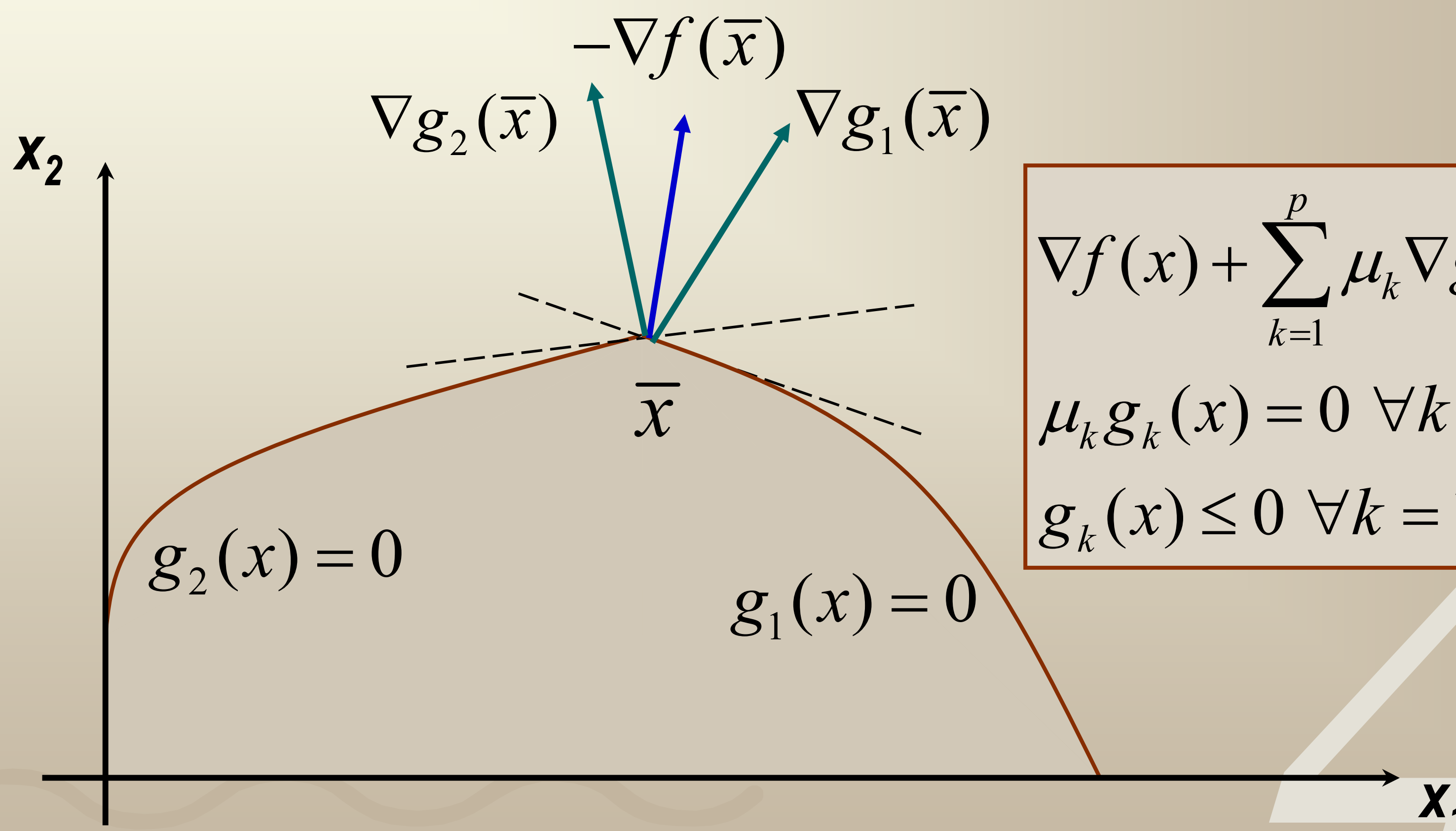
$$g_i(x) \leq 0 \; i = 1,\ldots,p$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$



Motivación: Optimización No-Lineal Restringida

Condiciones de Optimalidad: Karush - Kuhn - Tucker



$$\nabla f(x) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k \nabla g_k(x) = \vec{0}$$

$$\mu_k g_k(x) = 0 \ \ \forall k = 1, \ldots, p$$

$$g_k(x) \le 0 \ \ \forall k = 1, \ldots, p$$

Motivación: Optimización No-Lineal Restringida

Condiciones de Optimalidad: Karush - Kuhn – Tucker:

Método de Activación de Restricciones:

- Dado el problema de programación no-lineal:

$$\boxed{\begin{aligned} &\min_{s.a.} f(x) \\ &g_i(x) \le 0 \;\; i = 1, \ldots, p \\ &x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}}$$

- Una restricción es activa en x si:

$$\boxed{g_k(x) = 0}$$

Motivación: Optimización No-Lineal Restringida

Condiciones de Optimalidad: Karush - Kuhn – Tucker

- Para resolver el sistema de Karush - Kuhn – Tucker aplicamos el Método de Activación de Restricciones:

1) Establecer las combinaciones de activación
2) Para cada combinación de activación:
   - i) Determinar el sistema K-K-T aplicando las condiciones de holgura
   - ii) Resolver el sistema
   - iii) Verificar la factibilidad de la solución encontrada en ii)
3) La solución es el punto estacionario + factible encontrado de mínimo valor.

SENL: Métodos de Optimización Sin Restricciones

- Primer Orden
  - Método del Gradiente y Variedades
  - Método del Gradiente Conjugado
  - Método de Fletcher-Reeves
- Segundo Orden
  - Métodos de Newton
  - Variedades
- Cuasi-Newton
  - DFP: Davidon - Fletcher - Powell
  - BFGS
- Penalización
  - Interior Exterior

SENL: Métodos de Optimización Sin Restricciones

Método de Gradiente

Etapa 0: Seleccionar un punto inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$

$k = 0$

Etapa 1: Calcular $\nabla f(x^k)$

Si $\|\nabla f(x^k)\| = 0 \Rightarrow STOP$

Si no, seguir a Etapa 2.

Etapa 2: $d^k = -\nabla f(x^k)$

Calcular: α^k solución del problema uni-dimensional:

$$\min_{\alpha \geq 0} h_{x^k, d^k}(\alpha) = f(x^k + \alpha d^k) - f(x^k)$$

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$$

$k = k + 1$ y volver a Etapa 1.

Minimización en 1 dimensión

SENL: Métodos de Optimización Sin Restricciones

Ejemplo Método de Gradiente

k	x^k	$f(x^k)$	$\nabla f(x^k)$	$\\|\nabla f(x^k)\\|$	α^k
0	(0.00,3.00)	52.00	(–44.00,24.00)	50.12	0.062
1	(2.70,1.51)	0.34	(0.73,1.28)	1.47	0.24
2	(2.52,1.20)	0.09	(0.80,–0.48)	0.93	0.11
3	(2.43,1.25)	0.04	(0.18,0.28)	0.33	0.31
4	(2.37,1.16)	0.02	(0.30,–0.20)	0.36	0.12
5	(2.33,1.18)	0.01	(0.08,0.12)	0.14	0.36
6	(2.30,1.14)	0.009	(0.15,–0.08)	0.17	0.13
7	(2.28,1.15)	0.007	(0.05,0.08)	0.09	

$$\min_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} \quad (x_1-2)^4 + (x_1-2x_2)^2$$

SENL: Métodos de Optimización Sin Restricciones

Método Gradiente Conjugado

$$\min q(x) = -\tfrac{1}{2} x^t Q x + b^t x$$

Etapa 0: Seleccionar un punto inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$k = 0$$

$$g^0 = \nabla q(x^0) = Qx^0 - b$$

$$d^0 = -\nabla q(x^0)$$

Etapa 1:

$$\alpha^k = -\frac{(g^k)^t d^k}{(d^k)^t Q d^k}$$

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$$

Si $\|x^{k+1} - x^k\| \approx 0 \Rightarrow STOP$

Si no, seguir a Etapa 2.

Etapa 2:

$$g^{k+1} = \nabla q(x^{k+1}) = Qx^{k+1} - b$$

$$\rho_k = \frac{(g^{k+1})^t Q d^k}{(d^k)^t Q d^k}$$

$$d^{k+1} = -g^{k+1} + \rho^k d^k$$

$k = k + 1$ y volver a Etapa 1.

SENL: Métodos de Optimización Sin Restricciones

Método de Fletcher - Reeves

Etapa 0: Seleccionar un punto inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$

$k = 0$

$d^0 = -\nabla f(x^0)$

Etapa 1: Calcular α^k solución del problema unidimensional:

$\alpha^k = \arg\min_{\alpha \geq 0} f(x^k + \alpha d^k)$ ← Minimización en 1 dimensión

$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$

Si $\| x^{k+1} - x^k \| \approx 0 \Rightarrow STOP$

Si no, seguir a Etapa 2.

Etapa 2: Calcular $\nabla f(x^{k+1})$

$$\rho^k = \frac{\nabla f(x^{k+1})^t \nabla f(x^{k+1})}{\nabla f(x^k)^t \nabla f(x^k)}$$

$d^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \rho^k d^k$

$k = k + 1$ y volver a Etapa 1.

SENL: Métodos de Optimización Sin Restricciones

Ejemplo Método de Fletcher - Reeves

k	x^k	$f(x^k)$	$\nabla f(x^k)$	$\|\nabla f(x^k)\|$	α^k
0	$(0.00, 3.00)$	52.00	$(-44.00, 24.00)$	50.12	0.062
1	$(2.54, 1.21)$	0.10	$(0.87, -0.48)$	0.99	0.11
2	$(2.25, 1.10)$	0.008	$(0.16, -0.20)$	0.32	0.10
3	$(2.19, 1.09)$	0.0017	$(0.05, -0.04)$	0.06	0.11

$$\min_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} \quad (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$$

SENL: Métodos de Optimización Sin Restricciones

Método de Newton

Etapa 0: Seleccionar un punto inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$

$k = 0$

Etapa 1: Calcular $\nabla f(x^k)$

Si $\|\nabla f(x^k)\| \approx 0 \Rightarrow STOP$

Si no, calcular $\nabla^2 f(x^k)$, $[\nabla^2 f(x^k)]^{-1}$ y seguir a Etapa 2.

Etapa 2: Calcular:

$$x^{k+1} = x^k - [\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k)$$

$k = k + 1$ y volver a Etapa 1.

SENL: Métodos de Optimización Sin Restricciones

k	x^k	$f(x^k)$	$\nabla f(x^k)$	$\nabla^2 f(x^k)$	$-[\nabla^2 f(x^k)]^{-1}\nabla f(x^k)$
0	$(0.00, 3.00)$	52.00	$(-44.00, 24.00)$	$\begin{bmatrix} 50.0 & -4.0 \\ -4.0 & 8.0 \end{bmatrix}$	$(0.67, -2.67)$
1	$(0.67, 0.33)$	3.13	$(-9.39, -0.04)$	$\begin{bmatrix} 23.23 & -4.0 \\ -4.0 & 8.0 \end{bmatrix}$	$(0.44, 0.23)$
2	$(1.11, 0.56)$	0.63	$(-2.84, -0.04)$	$\begin{bmatrix} 11.5 & -4.0 \\ -4.0 & 8.0 \end{bmatrix}$	$(0.30, 0.14)$
3	$(1.41, 0.70)$	0.12	$(-0.80, -0.04)$	$\begin{bmatrix} 6.18 & 4.0 \\ -4.0 & 8.0 \end{bmatrix}$	$(0.20, 0.10)$
4	$(1.61, 0.80)$	0.02	$(-0.22, -0.04)$	$\begin{bmatrix} 3.83 & -4.0 \\ -4.0 & 8.0 \end{bmatrix}$	$(0.13, 0.07)$
5	$(1.74, 0.87)$	0.005	$(-0.07, -0.00)$	$\begin{bmatrix} 2.81 & -4.0 \\ -4.0 & 8.0 \end{bmatrix}$	$(0.09, 0.04)$

Ejemplo Método de Newton

$$\min_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} (x_1-2)^4 + (x_1-2x_2)^2$$

SENL: Métodos de Optimización Sin Restricciones

Método DFP: Davidon – Fletcher -Powell

Etapa 0: Seleccionar un punto inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$

Inicializar $S_0 = I_{n \times n}$

$k = 0$

Etapa 1: Calcular $g^k = \nabla f(x^k)$

Si $\|g^k\| \approx 0 \Rightarrow STOP$

Si no, calcular $x^{k+1} = x^k - t^k S^k g^k$

donde $t_k \geq 0$ se escoge según regla de Goldstein

y seguir a Etapa 2.

Etapa 2: Calcular:

$p^k = x^{k+1} - x^k,\ q^k = g^{k+1} - g^k$

$$S^{k+1} = S^k + \frac{p^k (p^k)^t}{(p^k)^t q^k} - \frac{S^k q^k (q^k)^t S^k}{(q^k)^t S^k q^k}$$

$k = k + 1$ y volver a Etapa 1.

SENL: Métodos Optimización con Restricciones
Ejemplo Optimización en Matlab

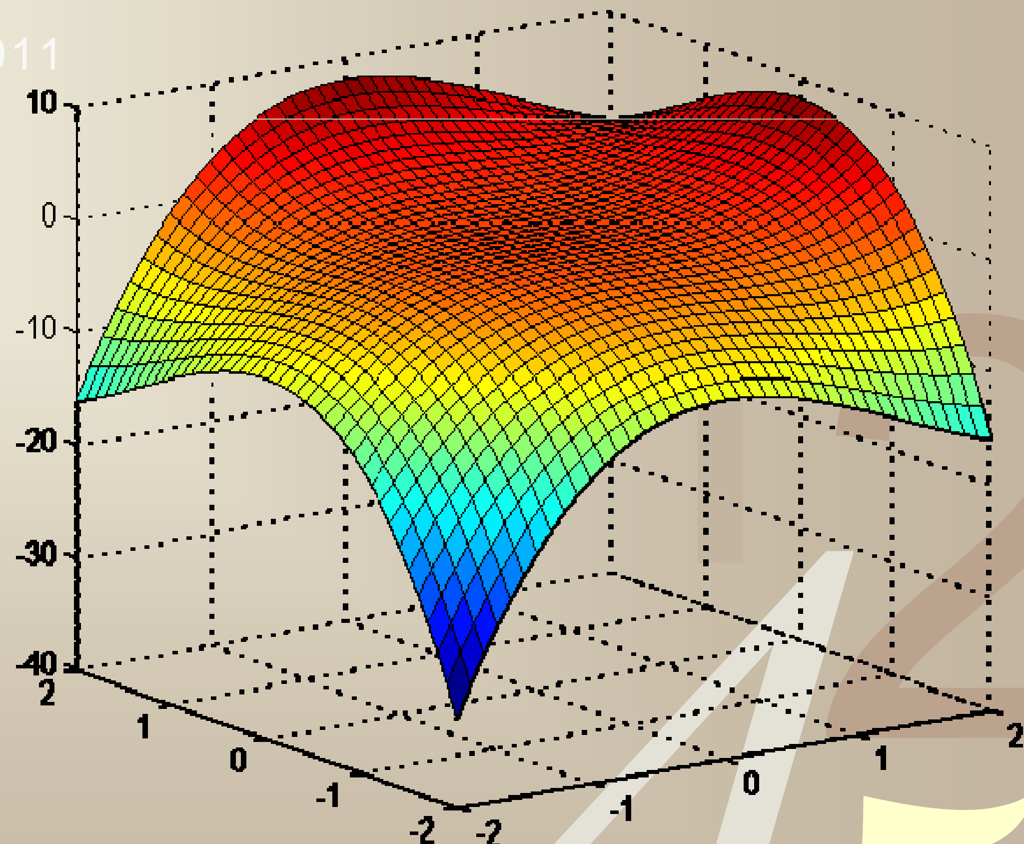
$$\min_{s.a.} x_1^3 - x_1^2 x_2^2 + x_2^3$$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$$

$$g_2(x) = -x_1 \leq 0$$

$$g_3(x) = -x_2 \leq 0$$

```
> [x,y] = meshgrid(-2:0.05:2);
> z=x.^3.-x.^2.*y.^2.+y.^3;
> mesh(x,y,z);
```



Visualización en Matlab

SENL: Métodos Optimización con Restricciones Ejemplo Optimización en Matlab

```
cpnl.m
function [c,ceq] = cpnl(x)
c = zeros(3,1);
c(1) = x(1)^2 + x(2)^2 - 1;
c(2) = -x(1);
c(3) = -x(2);
ceq = [];
```

$$\min_{s.a.} x_1^3 - x_1^2 x_2^2 + x_2^3$$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$$

$$g_2(x) = -x_1 \leq 0$$

$$g_3(x) = -x_2 \leq 0$$

```
epnl.m
function y = epnl(x,a)
y = x(1)^3 +a*x(1)^2*x(2)^2 + x(2)^3;
```

Optimización en Matlab

```
>x0=[1;1]; a=-1;
>[xmin,f_xmin]=fmincon(@(x)epnl(x,a),x0,[],[],[],[],[],[],@(x)cpnl(x));
```

Bibliografía SENL

1) R. Burden & J. D. Faires, Análisis Numérico, Séptima Edición, Thomson Learning, 2002.
2) M Bazaraa, H. Sherali, C. M. Shetty, Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, John Wiley & Sons, 1993.
3) D. Luenberger, Linear and Nonlinear Programming, Second Edition, Addison-Wesley, 1984.
4) M. Minoux, Mathematical Programming: Theory and Algorithms, John Wiley and Sons, 1995.