MA26B. Matemáticas Aplicadas.

Tarea 3.

Fórmulas de Green, funciones armónicas y variable compleja.

Prof. Alberto Mercado
Aux. Miguel Concha, Germán Ibarra.
20 de abril de 2007

1. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie cerrada, y $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2. Pruebe que

$$\int_S rot(G) \cdot dS = 0$$

Indicación: Use el teorema de Gauss.
¿Cuál es la relación con el Teorema de Stokes?.

2. Sea $\vec{r}$ el campo vectorial dado por $\vec{r}(x, y, z) = (x, y, z)$. Dada una superficie regular S y un vector fijo $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^3$, demuestre que

$$\iint_S \vec{v}_0 \cdot d\vec{S} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\partial S} (\vec{v}_0 \times \vec{r}) \cdot d\vec{r} & \text{si} \quad S \text{ tiene borde } \partial S \neq \emptyset \\ 0 & \text{si} \quad S \text{ es una superficie cerrada} \end{cases} \tag{1}$$

Sugerencia: Use el teorema de Stokes en el primer caso, y el de Gauss en el segundo.

3. Determine si cada uno de los siguientes campos vectoriales es el **gradiente** de alguna función escalar. Si es así, encuentrela.

   a) $F(x, y, z) = (2xyz + \operatorname{sen} x)\hat{\imath} + x^2 z\hat{\jmath} + x^2 y\hat{k}$.
   b) $F(x, y, z) = xy\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$.
   c) $F(x, y) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$.
   d) $F(x, y) = (xy, xy)$.
   e) $F(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$.

4. Determine si cada uno de los siguientes campos vectoriales es el **rotacional** de algún otro campo vectorial. Si es así, encuentre el campo.

   a) $F(x, y, z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$.
   b) $F(x, y, z) = (x^2 + 1, z - 2xy, y)$.
   c) $F(x, y, z) = xz\hat{\imath} - yz\hat{\jmath} + y\hat{k}$.
   d) $F(x, y, z) = (y^2, x^2, z^2)$.

e) $F(x,y,z) = (x\cos y)\hat{\imath} - (\operatorname{sen} y)\hat{\jmath} + (\operatorname{sen} x)\hat{k}$.

5. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1.

   a) Muestre que $\quad \operatorname{div}(fF) = f\operatorname{div}(F) + \nabla f \cdot F$.

   b) Suponga que $\operatorname{div}(F) = 0$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto acotado con frontera $\partial\Omega$ superficie cerrada regular. Sea $\Omega_1 \supset \Omega \cup \partial\Omega$. Probar que para todo par de funciones $u_1,\ u_2 \in C^1(\Omega_1)$ se tiene

   $$\iiint_\Omega (F \cdot \nabla u_1)u_2\, dV = -\iiint_\Omega (F \cdot \nabla u_2)u_1\, dV + \iint_{\partial\Omega} u_1 u_2 F \cdot dS$$

   donde $\partial\Omega$ está orientada según la normal exterior.
   Indicación: Usar el inciso *a)* y el Teorema de Gauss para un campo adecuado.

6. Dada una función $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^2, **verifique** el Teorema de Stokes para $\vec{F} = \nabla g$ en S, donde S es cualquier superficie regular con borde ∂S.

7. **Funciones armónicas conjugadas y campos conservativos** .
   Sean $u(x,y)$ y $v(x,y)$ dos funciones de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$. Considere los campos en $\mathbb{R}^3$ definidos por $F = v\hat{\imath} + u\hat{\jmath}$, y $G = u\hat{\imath} - v\hat{\jmath}$.

   a) Pruebe que F y G son conservativos si y sólo si las funciones u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy - Riemann. En tal caso decimos que u y v son funciones *conjugadas*.

   b) Pruebe que si u y v son funciones conjugadas y de clase C^2, entonces $\Delta u = 0$ y $\Delta v = 0$, (diremos que u y v son *armónicas*). Pruebe además que $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.

   c) Si u es de clase C^2 y **armónica**, pruebe que existe una función v conjugada de u.
   Indicación: Esto es equivalente a probar que cierto campo es conservativo.

8. **Ecuación de Laplace con condición de borde Neumann.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$ abierto, conexo, acotado, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie (o un curva en $n = 2$) regular por trozos. Considere la ecuación:

   $$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u & = & f & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} & = & g & \partial\Omega \end{array} \right. \tag{2}$$

   donde las funciones $f \in C(\Omega)$ y $g \in C(\partial\Omega)$ están dadas.

   a) Pruebe que F y g deben satisfacer la condición de compatibilidad dada por $\displaystyle\int_{\partial\Omega} g\, d\vec{S} = \int_\Omega f dV$.
   Sugerencia: Use las fórmulas de Green con u y 1.

   b) Muestre que si $F = 0$ y g es constante en $\partial\Omega$, entonces u es constante en Ω.
   Sugerencia: Argumente que por el inciso anterior, g debe ser cero. Después, use de nuevo las fórmulas de Green.

9. **Funciones armónicas radiales en $\mathbb{R}^n$.** Encuentre las funciones radiales (i.e; tales que u solo depende de $r = \|\vec{x}\|, \quad x \in \mathbb{R}^n$) que son soluciones de cada uno de los siguientes problemas.

   Sugerencia: Pruebe primero que $\Delta u = \dfrac{d^2u}{dr^2} + \dfrac{n-1}{r}\dfrac{du}{dr}$. Por tanto las funciones radiales armónicas en $\mathbb{R}^n$ son:

   $$u = \left\{ \begin{array}{ll} C_1 \ln(r) + C_2 & n = 2 \\ \frac{C_1}{r^{n-2}} + C_2 & n > 2 \end{array} \right. \tag{3}$$

   donde C_1 y C_2 son constantes.

a) Sea $n = 3$, y $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, 1 < \|x\| < 2$. Entonces $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, con $\Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|x\| = 1\}$ y $\Gamma_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|x\| = 2\}$. Resuelva el problema:

$$\left\{ \begin{array}{ccll} \Delta u & = & 0 & \Omega \\ u & = & 0 & \Gamma_1 \\ u & = & 1 & \Gamma_2 \end{array} \right. \tag{4}$$

b) Sea $n = 2$, y $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 < \|x\| < 4$. Entonces $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, con $\Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|x\| = 2\}$ y $\Gamma_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|x\| = 4\}$. Resuelva el problema:

$$\left\{ \begin{array}{ccll} \Delta u & = & 0 & \Omega \\ u & = & 0 & \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} & = & 1 & \Gamma_2 \end{array} \right. \tag{5}$$

Indicación: Primero deberá probar que $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ es igual a $\frac{du}{dr}$ en Γ_2.

c) Sea $n = 3$, y $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, 3 < \|x\| < 6$. Entonces $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, con $\Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|x\| = 3\}$ y $\Gamma_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|x\| = 6\}$. Determine si tiene solución el problema dado por:

$$\left\{ \begin{array}{ccll} \Delta u & = & 0 & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} & = & 1 & \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} & = & 0 & \Gamma_2 \end{array} \right. \tag{6}$$

Indicación: Primero pruebe que $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{du}{dr}$ en Γ_2 y $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = -\frac{du}{dr}$ en Γ_1. Considere *a*) del problema anterior.

1) ¿Para qué condición (constante) en Γ_2 existe solución?. Determine **las** soluciones en tal caso.
2) Encuentre **la** solución con la condición en Γ_2 dada por $u = 4$.

10. Si $arg(z)$ es el valor principal del argumento de z, con valores en $(-\pi, \pi]$, demuestre que

$$arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \left\{ \begin{array}{ll} \pi/2 & \text{si } Im(z) > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } Im(z) < 0. \end{array} \right.$$

para todo z en el circulo $|z| = 1$.
Interprete geométricamente.

11. Muestre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, las raices n-ésimas de la unidad (excepto el 1) satisfecen cada una la ecuación *ciclotómica* $z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0$.
Indicación: Utilice una adecuada factorización de $z^n - 1 = 0$.

12. Determine el subconjunto de $\mathbb{C}$ donde cada una de las siguientes funciones es holomorfa y calcule su derivada:

a) $f(z) = z$.
b) $f(z) = e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y)$.
c) $f(z) = x^2 + iy^2$.
d) $f(z) = e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)$.
e) $f(z) = 2xy + i(y^2 - x^2)$.
f) $f(z) = (z^3 + 1)e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$.

donde se ha usado la notación $z = x + iy$ en cada caso.

13. Dada $f = u + iv$, con u y v de clase C^2, definimos $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$. Decimos que f es una función armónica compleja si $\Delta f = 0$. Demuestre que $f \in H(\Omega)$ si y sólo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas.

14. Dada una región $D \subset \mathbb{C}$, y una función $f = u + iv$ holomorfa en D, demuestre que :

    a) Si u es constante en D entonces f es constante.

    b) Si $|f|$ es constante en D entonces f es constante.
    Indicación: Establezca la relación $u^2 + v^2 = cte$, y tome derivadas con respecto a cada variable. Use luego las ecuaciones de CR.

    c) Si en cada $z \in D$ se tiene o bien $f(z) = 0$, o bien $f'(z) = 0$, entonces f es constante.
    Indicación: Use la función f^2.

15. En cada caso, encuentre todas las funciones enteras $f = u + iv$ que satisfacen la relación senalada.

    a) $u(x, y) = x^2 - y^2$.

    b) $u(x, y) = x^2 + y^2$.

    c) $u = u(x)$, $v = v(y)$.

16. Para cada serie, determine la región de convergencia:

    a) $\sum_1^\infty (log(n))^2 z^n$.

    b) $\sum_0^\infty \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} z^n$.

    c) $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n z^n}{n!}$.

    d) $\sum_0^\infty \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

    e) $\sum_0^\infty \frac{2^n z^n}{n!}$.

17. Demostrar lo que se pide:

    a) Sea $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ una serie con radio de convergencia $R > 0$. Sea $\{z_m\} \subset D(0, R)$ una sucesión tal que $z_m \to 0$ y $f(z_m) = 0$ para cada m. Probar que $f(z)$ es idénticamente cero.
    Indicación: Pruebe inductivamente que $c_n = 0$, usando en cada paso la continuidad de la serie $\frac{f(z)}{z^n}$.

    b) Si $\sum a_n z^n$ y $\sum b_n z^n$ convergen y son iguales en un conjunto tal que el origen es un punto de acumulación, entonces $a_n = b_n$ para toda n.