

Pauta del CONTROL 1: MA26B-2 Matemáticas Aplicadas 2007

Problema 1.

- a) Demuestre la fórmula para la torsión: $\tau(t) = \frac{[\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)] \cdot \vec{\gamma}'''(t)}{\|\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)\|^2}$

Teniendo en cuenta que $\frac{ds}{dt} = \|\vec{\gamma}'\|$, la derivada con respecto a t de cualquier función es igual a su derivada con respecto a s multiplicada por $\|\vec{\gamma}'\|$.

Derivaremos sucesivamente $\vec{\gamma}$, poniendo especial atención en la descomposición en los vectores T, N, B , y en las derivadas de estos vectores, para lo cual usaremos las fórmulas de Frenet. Dejaremos indicadas las derivadas de las funciones escalares, a menos de necesitarlas:

Para empezar, $\vec{\gamma}' = \|\vec{\gamma}'\|T$.

Entonces

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}'' &= \frac{d}{dt}(\|\vec{\gamma}'\|)T + \|\vec{\gamma}'\| \frac{d}{dt}(T) \\ &= \frac{d}{dt}(\|\vec{\gamma}'\|)T + \|\vec{\gamma}'\| \frac{d}{ds}(T) \|\vec{\gamma}'\| \\ &= \frac{d}{dt}(\|\vec{\gamma}'\|)T + \|\vec{\gamma}'\|^2 \kappa N \quad \textbf{(1pto.)}\end{aligned}$$

Ahora, notemos que $T \times T = 0$, por lo que se tiene

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}'' &= \|\vec{\gamma}'\|^3 \kappa (T \times N) \\ &= \kappa \|\vec{\gamma}'\|^3 B \quad \textbf{(0.5 ptos.)}\end{aligned}$$

y por tanto $\|\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)\| = \kappa \|\vec{\gamma}'\|^3$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}''' &= \frac{d}{dt}(\|\vec{\gamma}'\|) \frac{d}{dt}(T) + \frac{d^2}{dt^2}(\|\vec{\gamma}'\|)T + \|\vec{\gamma}'\|^2 \kappa \frac{d}{dt}(N) + \frac{d}{dt}(\|\vec{\gamma}'\|^2 \kappa)N \\ &= \frac{d}{dt}(\|\vec{\gamma}'\|) \kappa N \|\vec{\gamma}'\| + \frac{d^2}{dt^2}(\|\vec{\gamma}'\|)T + \|\vec{\gamma}'\|^2 \kappa (-\kappa T + \tau B) \|\vec{\gamma}'\| + \frac{d}{dt}(\|\vec{\gamma}'\|^2 \kappa)N \\ &= \left(-\|\vec{\gamma}'\|^2 \kappa^2 + \frac{d^2}{dt^2}(\|\vec{\gamma}'\|) \right) T + \left(\frac{d}{dt}(\|\vec{\gamma}'\|) \kappa \|\vec{\gamma}'\| + \frac{d}{dt}(\|\vec{\gamma}'\|^2 \kappa) \right) N + \|\vec{\gamma}'\|^3 \kappa \tau B \quad \textbf{(1pto.)}\end{aligned}$$

Dado que $\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}''$ es múltiplo de B , el único factor distinto de cero en el producto punto de la formula es el de los múltiplos de B :

$$\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}'' \cdot \vec{\gamma}''' = \kappa^2 \tau \|\vec{\gamma}'\|^6 \quad \textbf{((0.5ptos.)})$$

Por lo tanto $\frac{[\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)] \cdot \vec{\gamma}'''(t)}{\|\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)\|^2} = \frac{\kappa^2 \tau \|\vec{\gamma}'\|^6}{\kappa^2 \|\vec{\gamma}'\|^6} = \tau(t).$

- b) Para cada una de las curvas dadas, diga si es plana (justificando su respuesta), y encuentre el plano al que pertenecen, de ser el caso:

i) $\vec{\gamma}(t) = (\cos(t), \sin(t), 2 - \cos(t))$

Se calcula directamente que $\vec{\gamma}'(t) = (-\sin(t), \cos(t), \sin(t))$,

$$\vec{\gamma}''(t) = (-\cos(t), -\sin(t), \cos(t))$$

$$\text{y } \vec{\gamma}'''(t) = (\sin(t), -\cos(t), -\sin(t)).$$

De donde se tiene que $\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}'' = (1, 0, 1)$

$$\text{de donde } \vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}'' \cdot \vec{\gamma}'''(t) = (1, 0, 1) \cdot (\sin(t), -\cos(t), -\sin(t)) = 0.$$

De la fórmula se tiene que $\tau = 0$, y por lo visto en clase se trata de una curva plana. **(0.8 pto.)**

Para calcular el plano donde está contenida, observemos que sumando la primer y la tercer coordenadas de $\vec{\gamma}$ se tiene $\cos(t) + 2 - \cos(t) = 2$. Es decir, los puntos de la imagen de γ satisfacen $x + z = 2$. Es decir, la curva pertenece al plano $x + z = 2$. **(0.5 pto.)**

(NOTA: De hecho, este argumento sirve como prueba de que la curva es plana, sin necesidad de calcular las derivadas, de manera que se daría un punto se da este argumento, igual para iii).)

ii) $\vec{\gamma}(t) = (2t^2 - t, t - t^3, t^2 - 1)$

Calculando las derivadas de $\vec{\gamma}$, se tiene:

$$\vec{\gamma}'(t) = (4t - 1, 1 - 3t^2, 2t),$$

$$\vec{\gamma}''(t) = (4, -6t, 2) \text{ y}$$

$$\vec{\gamma}'''(t) = (0, -6, 0).$$

De donde se tiene que $\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}'' = (6t^2 + 2, 2, 12t^2 - 18t - 4)$ (y es un vector distinto de cero).

Por tanto $(\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}'') \cdot \vec{\gamma}''' = (6t^2 + 2, 2, 12t^2 - 18t - 4) \cdot (0, -6, 0) = -12$, y entonces de la fórmula probada antes, se tiene $\tau \neq 0$ y por tanto la curva NO es plana. **(0.8 pto.)**

iii) $\vec{\gamma}(t) = (1 + t^2, 1 + t, 2t)$

Directamente se tiene $\vec{\gamma}''' = 0$, por lo que la torsión es cero y la curva es plana. **(0.8 pto.)**

Razonando como en i), se tiene que la curva satisface la relación $z - 2y = -2$, por lo que la curva está en el plano $2y - z + 2 = 0$. **(0.5 pto.)**

NOTA: Otras formas de determinar el plano (ya sea su parametrización o su ecuación) al que pertenecen las curvas son: Calcular el vector binormal $B(t_0)$ y encontrar el plano perpendicular a $B(t_0)$ que pasa por $\vec{\gamma}(t_0)$, para algún t_0 ; o bien encontrar tres puntos cualesquiera de la curva (evaluando en tres valores de t) y determinar el plano que pasa por esos tres puntos, etc.

Problema 2.

- a) Probaremos el **Teorema de Pappus**: Sean $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva regular simple, y $\Upsilon \subset \mathbb{R}^2$ una recta tal que $\Gamma \cap \Upsilon = \emptyset$. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie generada por Γ al girar en torno a la recta Υ . Entonces S es una superficie regular con área dada por $A(S) = L(\Gamma)\ell(C)$, donde $L(\Gamma)$ es la longitud de Γ , y $\ell(C)$ es la distancia recorrida por el **centroide** de Γ al girar.

Observación: El **centroide**, o centro de masa de Γ , es el punto $C = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ con coordenadas dadas por las integrales de línea $\bar{x} = \frac{1}{L(\Gamma)} \int_{\Gamma} x d\vec{r}$, $\bar{y} = \frac{1}{L(\Gamma)} \int_{\Gamma} y d\vec{r}$.

Para ello, suponga que Υ es el eje y , y que Γ está contenida en el semiplano derecho.

- 1) Denote por $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$ una parametrización regular de Γ . Encuentre una parametrización regular de S (escrita en términos de $\vec{\gamma}$).

Cuando el punto $\vec{\gamma}(t)$ de la curva Γ gira en torno al eje y describe una circunferencia en un plano paralelo al plano $x - y$, por lo que su coordenada y permanece constante, con valor $y(t)$. La

circunferencia que describe tiene radio $x(t)$, por lo que en un ángulo θ , las coordenadas restantes resultan ser $x = x(t) \cos(\theta)$, $z = x(t) \sin(\theta)$.

Por lo tanto una parametrización de la superficie es

$$\varphi(t, \theta) = (\cos(\theta)x(t), y(t), \sin(\theta)x(t))$$

con $t \in [a, b]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. **(0.5 pts)**.

Vemos que

$$T_\theta(t, \theta) = (-\sin(\theta)x(t), 0, \cos(\theta)x(t)),$$

$$T_t(t, \theta) = (\cos(\theta)x'(t), y'(t), \sin(\theta)x'(t))$$

(0.4 pts)

de donde se tiene

$$T_\theta(t, \theta) \times T_t(t, \theta) = \hat{i}(-x(t)y'(t)\cos(\theta)x(t)) - \hat{j}(-x(t)x'(t)\sin^2(\theta) - x(t)x'(t)\cos^2(\theta))$$

$$+ \hat{k}(-x(t)y'(t)\sin(\theta))$$

$$= (x(t)y'(t)\cos(\theta), x(t)x'(t), -x(t)y'(t)\sin(\theta))$$

(0.3 pts)

y por tanto $\|T_\theta \times T_t\| = ((x(t)y'(t))^2 \cos^2 + (x(t)y'(t))^2 \sin^2 + (x(t)x'(t))^2)^{1/2}$

$$= ((x(t)y'(t))^2 + (x(t)x'(t))^2)^{1/2}$$

$$= |x(t)|((y'(t))^2 + (x'(t))^2)^{1/2}$$

y dado que Γ está en el semiplano de la derecha, $x(t) > 0$, y como Γ es regular, se tiene $\|\vec{\gamma}'(t)\| = ((y'(t))^2 + (x'(t))^2)^{1/2} > 0$. Por lo tanto la parametrización $\vec{\varphi}$ es regular. **(0.3 PTOS)**. (NOTA: es posible que el alumno conteste estas ultimas preguntas en el siguiente inciso, en cuyo caso hay que otorgar los puntos de ambas preguntas.)

2) Pruebe que $A(S) = 2\pi \int_\Gamma x d\vec{r}$.

Dado que $x(t) > 0$ se tiene $\|T_\theta \times T_t\| = x(t)((y'(t))^2 + (x'(t))^2)^{1/2}$ de donde

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_a^b x(t)((y'(t))^2 + (x'(t))^2)^{1/2} dt d\theta$$

(0.5 pts)

Pero $\|\vec{\gamma}'(t)\| = ((y'(t))^2 + (x'(t))^2)^{1/2}$, por lo que sustituyendo arriba se tiene:

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_a^b x(t)\|\vec{\gamma}'(t)\| dt d\theta$$

$$= 2\pi \int_a^b x(t)\|\vec{\gamma}'(t)\| dt$$

$$= 2\pi \int_\Gamma x d\vec{r} \quad \textbf{(1 Pto)}.$$

3) Concluya.

Por definición de centroide, se tiene que $\bar{x} = \frac{1}{L(\Gamma)} \int_\Gamma x d\vec{r}$. Entonces $\int_\Gamma x d\vec{r} = \bar{x}L(\Gamma)$ y del inciso anterior se tiene que

$$A(S) = 2\pi\bar{x}L(\Gamma) \quad \textbf{(0.7)}$$

Por último, la distancia del centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ al eje y es justamente $\bar{x}$, por lo que la distancia que recorre al girar es $2\pi\bar{x}$. Por lo tanto hemos probado que $A(S) = \ell(C)L(\Gamma)$. **(0.3 pts)**.

- b) Aplique el resultado anterior para calcular el área de la superficie engendrada por el cuadrado con vértices en $(1, -1), (3, -1), (3, 1)$ y $(1, 1)$ al girar en torno al eje y .

Claramente se tiene que $L(\Gamma) = 8$. **(0.5 ptos)** .

Para aplicar la fórmula anterior, debemos calcular el centroide de Γ (al menos, su coordenada $\bar{x}$). Esto significa calcular $\bar{x} = \frac{1}{8} \int_{\Gamma} x d\vec{r}$. (El resultado final será $A(S) = 8(2\pi\bar{x}) = 2\pi \int_{\Gamma} x d\vec{r}$).

Si Γ_j es cada uno de los lados del cuadrado Γ , con $j = 1, \dots, 4$, entonces $\int_{\Gamma} x d\vec{r} = \sum_1^4 \int_{\Gamma_j} x d\vec{r}$.

Como parametrizaciones de los lados (enpezando por el lado inferior) podemos usar:

$$\gamma_1(t) = (t, -1) \quad t \in (1, 3)$$

$$\gamma_2(t) = (3, t) \quad t \in (-1, 1)$$

$$\gamma_3(t) = (t, 1) \quad t \in (1, 3)$$

$$\gamma_4(t) = (1, t) \quad t \in (-1, 1)$$

OBS: Dado que calcularemos integrales de línea, la orientación de la curva no cambia el valor de la integral. Asimismo, otras parametrizaciones son posibles.

Observemos que $\|\vec{\gamma}'_j(t)\| = 1$ para toda j . Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} x d\vec{r} &= \int_1^3 t dt + \int_{-1}^1 3 dt + \int_1^3 t dt + \int_{-1}^1 1 dt \\ &= \frac{1}{2}(9 - 1) + 6 + \frac{1}{2}(9 - 1) + 2 \\ &= 4 + 6 + 4 + 2 = 16 \quad \textbf{(1 pto.)} \end{aligned}$$

Entonces $\bar{x} = \frac{1}{8}16 = 2$. Lo que corresponde con el centro del cuadrado, que por simple inspección resulta ser $(2, 0)$. (NOTA: SI el alumno argumenta que este es el centro sin calcular la integral, tendría 0.5 ptos.)

Por lo tanto, $A(S) = L(\Gamma)2\pi\bar{x} = 32\pi$. **(0.5 ptos.)**

- c) (2 ptos. extras) Pruebe que el centroide de **cualquier** elipse $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ es igual a su centro.

Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ la elipse con centro $C \in \mathbb{R}^2$ y cuyos semiejes son los vectores ortogonales $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ (Es decir, los cuatro v'ertices de Γ son $C \pm \vec{a}, C \pm \vec{b}$).

Entonces una parametrización de Γ es

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(t) &= C + \cos(t)\vec{a} + \sin(t)\vec{b} \\ t &\in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\vec{\gamma}'(t) = -\sin(t)\vec{a} + \cos(t)\vec{b}$$

y dado que $\vec{a}, \vec{b}$ son ortogonales, se tiene

$$\|\vec{\gamma}'(t)\| = \left(\sin^2(t)\|\vec{a}\|^2 + \cos^2(t)\|\vec{b}\|^2 \right)^{1/2}$$

Denotando $C = (c_1, c_2)$, $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x d\vec{r} \\ &= \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} (c_1 + a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} c_1 \|\gamma'(t)\| d\vec{r} + \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} (a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t)) \|\gamma'(t)\| dt \\
&= c_1 + \frac{1}{L} \int_0^\pi (a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t)) \|\gamma'(t)\| dt \\
&\quad + \frac{1}{L} \int_\pi^{2\pi} (a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t)) \|\gamma'(t)\| dt \\
&= c_1 + \frac{1}{L} \int_0^\pi (a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t)) \|\gamma'(t)\| dt \\
&\quad - \frac{1}{L} \int_0^\pi (a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t)) \|\gamma'(t)\| dt \\
&= c_1
\end{aligned}$$

En la penúltima igualdad hemos hecho el cambio de variable $s = t + \pi$, y las identidades trigonométricas $\sin(t + \pi) = -\sin(t)$ y $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$ para cada $t \in [0, 2\pi)$, tanto para las funciones que aparecen en el cálculo anterior, como aquellas dentro de la expresión de $\|\gamma'(t)\|$.

Análogamente se prueba que $\bar{y} = c_1$, de donde se tiene que el centroide de Γ es C .

NOTA: Si se prueba para solo para elipses con ejes paralelos a los ejes cartesianos, tendría **1pto** y si solo lo prueba para semiejes con igual norma (es decir, para circunferencias) tendría **0.5 pto**.

Problema 3.

- a) Pruebe el resultado conocido como **Ley de Gauss**: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto conexo cuyo borde $\partial\Omega$ es una superficie regular, orientada por la normal exterior y tal que $\vec{0} = (0, 0, 0) \notin \partial\Omega$. Denotemos

$$\vec{r}(x, y, z) = (x, y, z). \text{ Entonces: } \iint_{\partial\Omega} \frac{1}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{0} \notin \Omega \\ 4\pi & \text{si } \vec{0} \in \Omega \end{cases}$$

Indicaciones:

- 1) Pruebe el resultado en el caso $0 \notin \Omega$. (Use el Teorema de Gauss)

$$\text{Denotemos } F(x, y, z) = \frac{1}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

Observamos que el único punto donde F no es C^1 es en el origen. Por hipótesis $\vec{0} \notin \partial\Omega$, por lo que F es C^1 en una vecindad de $\Omega \cup \partial\Omega$. Por lo tanto podemos usar el Teorema de Gauss (de la divergencia). **(0.5 pto.)**

Para calcular $\text{div}(F)$, derivando F_1 se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} F_1(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\
&= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - x \cdot \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\
&= \frac{\|\vec{r}\|^3 - 3x^2 \|\vec{r}\|}{\|\vec{r}\|^6} \quad \textbf{(0.5 pto)}
\end{aligned}$$

Entonces, podemos concluir que las derivadas $\frac{\partial}{\partial y} F_2$ y $\frac{\partial}{\partial z} F_3$ son iguales a la expresión anterior, con los papeles de x, y, z intercambiados. (Es decir, ahora se tiene $-3y^2$ y $-3z^2$ respectivamente). Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\text{div}(F) &= \frac{1}{\|\vec{r}\|^6} (3\|\vec{r}\|^3 - 3(x^2 + y^2 + z^2)\|\vec{r}\|) \\
&= \frac{1}{\|\vec{r}\|^6} (3\|\vec{r}\|^3 - 3\|\vec{r}\|^2 \|\vec{r}\|) = 0 \quad \textbf{(0.5 pts)}
\end{aligned}$$

De donde se tiene, por el Teorema de Gauss, que:

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx dy dz = 0$$

- 2) Verifique que para todo $R > 0$ se tiene $\iint_{S_R} \frac{1}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} \cdot d\vec{S} = 4\pi$. Hemos denotado $S_R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{x}\| = R\}$.

Usaremos la relación $\iint_{S_R} F \cdot d\vec{S} = \iint_{S_R} (F \cdot \vec{n}) d\vec{S}$, donde $\vec{n}$ es la normal unitaria exterior (**0.5 pts.**).

En este caso, por ser S_R una esfera con centro en el origen, sabemos que su normal exterior es $\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{r}\|} \vec{r}$. Además, dado que $\|(x, y, z)\| = R$ para todo punto en S_R , se tiene $F(x, y, z) = \frac{1}{R^3} \vec{r}$, y $\vec{n} = \frac{1}{R} \vec{r}$ (**0.5 pts.**)..

Entonces

$$\begin{aligned} \iint_{S_R} F \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_R} (F \cdot \vec{n}) d\vec{S} \\ &= \frac{1}{R^4} \iint_{S_R} \|\vec{r}\|^2 d\vec{S} \\ &= \frac{R^2}{R^4} \iint_{S_R} d\vec{S} \\ &= \frac{1}{R^2} A(S_R) = \frac{1}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi \quad (\text{0.5 pts.}). \end{aligned}$$

(la penúltima igualdad dada la fórmula del área de la esfera de radio R).

- 3) Pruebe que existe $\varepsilon > 0$ tal que el Teorema de Gauss es válido en el abierto $\Omega_0 = \Omega \setminus D_\varepsilon$, donde $D_\varepsilon = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{x}\| \leq \varepsilon\}$, y concluya.

Si $\vec{0} \in \Omega$, como Ω es abierto se tiene que existe $\varepsilon > 0$ tal que $D_\varepsilon \subset \Omega$. Si $\Omega_0 = \Omega \setminus D_\varepsilon$, dado que F es C^1 fuera del origen, se tiene que el Teorema de Gauss es válido en Ω_0 . (**0.5 pts.**).

En el inciso 1) calculamos que $\operatorname{div}(F) = 0$, por lo que

$$\iint_{\partial\Omega_0} \frac{1}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega_0} \operatorname{div}(F) = 0$$

(**0.5 pts.**).

Ahora, el borde de Ω_0 consta de dos superficies: el borde de la bola D_ε , que es la esfera de radio ε , más el borde de Ω . Ambos orientados respecto de la normal exterior a Ω_0 , que en el caso de la esfera S_ε corresponde a su normal interior.

Por lo tanto:

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{1}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_\varepsilon^-} \frac{1}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} \cdot d\vec{S} = 0$$

de donde

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{1}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} \cdot d\vec{S} = - \iint_{S_\varepsilon^-} \frac{1}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_\varepsilon^+} \frac{1}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} \cdot d\vec{S}$$

donde S_ε^- y S_ε^+ indican que la orientación de su normal es interior o exterior, respectivamente.

En el inciso anterior se vio que la integral en S_R es igual a 4π , de donde se concluye que (**0.5 pts.**)

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{1}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} \cdot d\vec{S} = 4\pi$$

- b) (2 ptos.) Compruebe el **Teorema de la divergencia en el plano**: Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto con borde ∂D curva regular parametrizada en sentido anti-horario. Sea $\vec{n}$ la normal unitaria **exterior** a la curva ∂D . Si $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de clase C^1 , entonces:

$$\int_{\partial D} (F \cdot \vec{n}) d\vec{r} = \iint_D \operatorname{div}(F) dx dy$$

para el caso particular del campo $F(x, y) = (x^2, x + y)$ en $D = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$.

Se tiene que $(\operatorname{div})F = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x + y) = 2x + 1$, por lo que el lado derecho de la igualdad que debemos comprobar resulta:

$$\begin{aligned} \iint_D \operatorname{div}(F) dx dy &= \iint_D (2x + 1) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (2x + 1) dx dy = (x^2 + x)|_0^1 = 2 \quad \textbf{(0.8 pts)} \end{aligned}$$

Por otra parte, ∂D es unión de 4 segmentos de recta (sus cuatro lados), cuyas parametrizaciones y normales (exteriores con respecto al cuadrado) están dadas por:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, 0) & \vec{n}_1 &= (0, -1) \\ \gamma_2(t) &= (1, t) & \vec{n}_2 &= (1, 0) \\ \gamma_3(t) &= (t, 1) & \vec{n}_3 &= (0, 1) \\ \gamma_4(t) &= (0, t) & \vec{n}_4 &= (-1, 0) \end{aligned}$$

con $t \in [0, 1]$ para cada curva. (**0.4 pts.**).

Observación: Dado que calcularemos integrales escalares, la orientación de la curva no afecta la integral. El signo de $\vec{n}$ si es muy importante.

Entonces, del lado derecho de la igualdad a verificar tenemos

$$\int_{\partial D} (F \cdot \vec{n}) d\vec{r} = \sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_j} (F \cdot \vec{n}_j) d\vec{r}$$

Dado que $\|\vec{\gamma}'_j\| = 1$ para cada j , las integrales resultan:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} (F \cdot \vec{n}_1) d\vec{r} &= \int_0^1 (F(\vec{\gamma}_1(t)) \cdot \vec{n}_1) dt = \int_0^1 (-t) dt = -\frac{1}{2} \\ \int_{\Gamma_2} (F \cdot \vec{n}_2) d\vec{r} &= \int_0^1 (F(\vec{\gamma}_2(t)) \cdot \vec{n}_2) dt = \int_0^1 1 dt = 1 \\ \int_{\Gamma_3} (F \cdot \vec{n}_3) d\vec{r} &= \int_0^1 (F(\vec{\gamma}_3(t)) \cdot \vec{n}_3) dt = \int_0^1 (t + 1) dt = \frac{3}{2} \\ \int_{\Gamma_4} (F \cdot \vec{n}_4) d\vec{r} &= \int_0^1 (F(\vec{\gamma}_4(t)) \cdot \vec{n}_4) dt = \int_0^1 0 dt = 0 \end{aligned}$$

de donde se concluye que (**0.8 pts.**).

$$\int_{\partial D} (F \cdot \vec{n}) d\vec{r} = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 2$$

y por tanto se comprueba el teorema.

■