Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática. Prof.: Alberto Mercado.
Santiago, 5 de abril de 2007. Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 1: MA26B-2 Matemáticas Aplicadas 2007

Problema 1.

a) (3 ptos.) Demuestre la fórmula para la torsión: $\tau(t) = \dfrac{[\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)] \cdot \vec{\gamma}'''(t)}{\|\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)\|^2}$ para una parametrización regular $\vec{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ no necesariamente en longitud de arco.

Hints: Use las fórmulas de Frenet: $\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$, donde s es el parámetro de **longitud de arco**. Recuerde que $\frac{ds}{dt} = \|\vec{\gamma}'\|$ y que $\{T, N, B\}$ son ortonormales. No es necesario calcular explícitamente las derivadas de $\|\vec{\gamma}'\|$, κ, τ. Comience por $\vec{\gamma}' = \|\vec{\gamma}'\|T$.

b) (3 ptos.) Para cada una de las curvas dadas, diga si es plana (justificando su respuesta), y encuentre el plano al que pertenecen, de ser el caso:
i) $\vec{\gamma}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 2-\cos(t))$ ii) $\vec{\gamma}(t) = (2t^2-t, t-t^3, t^2-1)$ iii) $\vec{\gamma}(t) = (1+t^2, 1+t, 2t)$

Problema 2.

a) Probaremos el **Teorema de Pappus**: Sean $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva regular simple, y $\Upsilon \subset \mathbb{R}^2$ una recta tal que $\Gamma \cap \Upsilon = \emptyset$. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie generada por Γ al girar en torno a la recta Υ. Entonces S es una superficie regular con área dada por $A(S) = L(\Gamma)\ell(C)$, donde $L(\Gamma)$ es la longitud de Γ, y $\ell(C)$ es la distancia recorrida por el **centroide** de Γ al girar.
Observación: El **centroide**, o centro de masa de Γ, es el punto $C = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ con coordenadas dadas por las integrales de línea $\bar{x} = \frac{1}{L(\Gamma)} \int_\Gamma x d\vec{r}$, $\bar{y} = \frac{1}{L(\Gamma)} \int_\Gamma y d\vec{r}$.

Para ello, suponga que Υ es el eje y, y que Γ está contenida en el semiplano derecho.

1) (1.5 ptos.) Denote por $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$ una parametrización regular de Γ. Encuentre una parametrización regular de S (escrita en términos de $\vec{\gamma}$).
2) (1.5 ptos.) Pruebe que $A(S) = 2\pi \displaystyle\int_\Gamma x d\vec{r}$.
3) (1 pto.) Concluya.

b) (2 ptos.) Aplique el resultado anterior para calcular el área de la superficie engendrada por el cuadrado con vértices en $(1, -1)$,$(3, -1)$,$(3, 1)$ y $(1, 1)$ al girar en torno al eje y.

c) (2 ptos. extras) Pruebe que el centroide de **cualquier** elipse $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ es igual a su centro.

Problema 3.

a) Pruebe el resultado conocido como **Ley de Gauss**: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto conexo cuyo borde $\partial\Omega$ es una superficie regular, orientada por la normal exterior y tal que $\vec{0} = (0, 0, 0) \notin \partial\Omega$.
Denotemos $\vec{r}(x, y, z) = (x, y, z)$. Entonces: $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} \frac{1}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{0} \notin \Omega \\ 4\pi & \text{si } \vec{0} \in \Omega \end{cases}$

Indicaciones:

1) (1 pto.) Pruebe el resultado en el caso $0 \notin \Omega$. (Use el Teorema de Gauss)
2) (1.5 pto.) Verifique que para todo $R > 0$ se tiene $\displaystyle\iint_{S_R} \frac{1}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r} \cdot d\vec{S} = 4\pi$. Hemos denotado $S_R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \, : \, \|\vec{x}\| = R\}$.
3) (1.5 ptos.) Pruebe que existe $\varepsilon > 0$ tal que el Teorema de Gauss es valido en el abierto $\Omega_0 = \Omega \setminus D_\varepsilon$, donde $D_\varepsilon = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \, : \, \|\vec{x}\| \le \varepsilon\}$, y concluya.

b) (2 ptos.) Compruebe el **Teorema de la divergencia en el plano**: Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto con borde ∂D curva regular parametrizada en sentido anti-horario. Sea $\vec{n}$ la normal unitaria **exterior** a la curva ∂D. Si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de clase C^1, entonces:

$$\int_{\partial D} (F \cdot \vec{n}) d\vec{r} = \iint_D \operatorname{div}(F) dx dy$$

para el caso particular del campo $F(x, y) = (x^2, x + y)$ en $D = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$.