

MA26B. Matemáticas Aplicadas.

Tarea 2.

Análisis Vectorial, curvas y superficies.

Prof. Alberto Mercado

Aux. Miguel Concha, Germán Ibarra.

2 de abril de 2007

1. Integrar la función escalar $f(x, y, z) = xyz$ a lo largo de cada una de las curvas siguientes.

a) $\vec{\gamma}(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), 3), t \in [0, 2\pi]$.

b) $\vec{\gamma}(t) = (\cos(t), \sin(t), t), t \in [0, 2\pi]$.

c) $\vec{\gamma}(t) = t\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}t^2\hat{j} + \frac{1}{3}t^3\hat{k}, 0 \leq t \leq 1$.

2. Un anillo con la forma de la curva dada por la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ está formado por un alambre tal que en cada punto (x, y) pesa $|x| + |y|$ gramos por unidad de longitud. Encontrar la masa del anillo.

3. **Hélices.**

a) Dados $a, b, c > 0$ tales que $c^2 = a^2 + b^2$, sea $C \subset \mathbb{R}^3$ la curva parametrizada por $\vec{r}: [0, 2\pi c] \rightarrow \mathbb{R}^3$ con

$$\vec{r}(s) = a \cos\left(\frac{s}{c}\right)\hat{i} + a \sin\left(\frac{s}{c}\right)\hat{j} + b\left(\frac{s}{c}\right)\hat{k}.$$

1) Muestre que el parámetro s es la longitud de arco sobre C . Calcule el triedro de Frenet: vectores tangente, normal y binormal a la curva. Pruebe que las rectas tangentes a C forman un ángulo constante con el vector $\hat{k}$.

2) Pruebe que las rectas normales principales (*i.e.* aquellas que pasan por $\vec{r}(s)$ y tienen como dirección al vector normal $N(s)$) cortan el eje z en un ángulo constante igual a $\pi/2$. Calcule la curvatura $\kappa = \kappa(s)$ y la torsión $\tau = \tau(s)$ de C , y verifique que $\kappa/\tau = a/b$.

Indicación: Puede utilizar la siguiente fórmula válida para la parametrización en longitud de arco: $\tau(s) = \frac{1}{\kappa(s)^2} [\vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s)] \cdot \vec{r}'''(s)$.

b) Sea $\vec{\sigma}: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva simple y regular $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Suponga que $\forall s \in [0, L], \kappa(s) \neq 0$ y $\tau(s) \neq 0$. Diremos que Γ es una *hélice* si existe una dirección fija $\hat{d}_0$ tal que todas las rectas tangentes a Γ forman un ángulo constante con $\hat{d}_0$. De esta forma, la curva C de la parte (a) es un caso particular de una hélice.

1) Pruebe que Γ es una hélice si y sólo si las rectas normales principales son paralelas a un plano fijo.

2) Pruebe que Γ es una hélice si y sólo si $\kappa/\tau \equiv cte$.

4. Encontrar una parametrización de las superficies dadas por las ecuaciones siguientes, y determinar la ecuación del plano tangente en el punto P indicado.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y = 12$, $P = (5, 3, 4)$.

b) $2x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 1$, $P = (2, 0, 3)$.

5. En cada caso, calcule el área de la superficie descrita, calcule la integral $\iint_S f d\vec{S}$, donde f es la función indicada; y realice un esbozo de S .

a) S es la parte del plano $x + y + z = 1$ en el cuadrante positivo $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$; $f(x, y, z) = x$.

b) S es la parte del plano $x = z$ **dentro** del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, $z \geq 0$; $f(x, y, z) = x$.

c) S es el triángulo con vértices $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$ y $(2, 0, 3)$; $f(x, y, z) = x$.

d) S es la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ entre los planos $z = 0$ y $z = x + 3$; $f(x, y, z) = x^2$.

6. Determinar el área acotada por un arco de la cicloide $\vec{\gamma}(\theta) = a(\theta - \sin(\theta), 1 - \cos(\theta))$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $a > 0$ es fijo. (Sugerencia: usar el Teorema de Green. Respuesta = $3\pi a^2$).

7. Sea $\vec{r}$ el campo vectorial dado por $\vec{r}(x, y, z) = (x, y, z)$. Dada una superficie regular S y un vector fijo $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^3$, demuestre que

$$\iint_S \vec{v}_0 \cdot d\vec{S} = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\partial S} (\vec{v}_0 \times \vec{r}) \cdot d\vec{r} & \text{si } S \text{ tiene borde } \partial S \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } S \text{ es una superficie cerrada} \end{cases} \quad (1)$$

Sugerencia: Use el teorema de Stokes para la primera opción, y el de Gauss para la segunda.

8. Sea S la superficie dada por $x^2 + z^2 - y = 0$, $y \leq 4$. Si $\vec{v}_0 = (0, 2, 3)$, calcular $\iint_S \vec{v}_0 \cdot d\vec{S}$. Sugerencia: Use ya sea la identidad probada en el inciso anterior; o bien use el Teorema de Gauss.

9. Sea Γ la curva cerrada dada por la intersección de las superficies $x + y + z = 1$ y $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$.

- a) Encuentre una parametrización de la superficie Π contenida en $x + y + z = 1$ y cuyo borde geométrico es la curva Γ . Haga un bosquejo.

Sugerencia: La curva es una elipse.

- b) Consideremos el campo vectorial $\vec{F}(x) = (z - y, x - z, y - x)$. Calcular $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Sugerencia: Usar ya sea el Teorema de Stokes; o bien la identidad (1) con un vector v_0 adecuado.

- c) Calcule el volumen comprendido entre el cono $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$ y la superficie Π .

Sugerencia: Usar el Teorema de Gauss con un campo vectorial adecuado.

10. Sea S una superficie **cerrada**, y sea F un campo vectorial C^2 . Use el Teorema de Gauss para mostrar que $\iint_S \text{rot}(F) \cdot d\vec{S} = 0$.

11. Evaluar $\iint_{\partial\Omega} F \cdot d\vec{S}$ donde $F(x, y, z) = (x, y, z)$ y Ω es el cubo unitario en el primer octante. Calcular directamente y comprobar con el Teorema de Gauss.

12. Sea $F(x, y, z) = y\hat{i} + z\hat{j} + xz\hat{k}$. Evaluar $\iint_{\partial\Omega} F \cdot d\vec{S}$ para cada una de las siguientes regiones:

a) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

b) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1, x \leq 0$.

13. Demuestre la **Ley de Gauss**: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto conexo cuyo borde $\partial\Omega$ es una superficie cerrada regular, tal que $\vec{0} = (0, 0, 0) \notin \partial\Omega$. Entonces se tiene

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{1}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{0} \notin \Omega \\ 4\pi & \text{si } \vec{0} \in \Omega \end{cases} \quad (2)$$

donde $\vec{r}(x, y, z) = (x, y, z)$.

Indicación: Para el primer caso, use el Teorema de Gauss en Ω (¿se cumplen las hipótesis?). Para el segundo caso, tome $\varepsilon > 0$ de manera que pueda utilizar el Teorema de Gauss en $\Omega \setminus B_\varepsilon(0)$, y concluya.

14. El objetivo de este ejercicio es demostrar el **Teorema de Stokes** en el caso particular en el que la superficie sea una **gráfica** de una **función** C^2 :

Sea D una región en el plano que satisface las hipótesis del Teorema de Green. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie orientada definida por la gráfica de la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 , y $F = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial C^1 en $\mathbb{R}^3$.

Demostraremos que

$$\iint_S \text{rot}(F) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} F \cdot d\vec{r}$$

Para esto, pruebe lo indicado en cada inciso:

a) Pruebe que para todo campo $G = (G_1, G_2, G_3)$, si S es la gráfica de la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces se tiene:

$$\iint_S G \cdot d\vec{S} = \iint_D \left(-\frac{\partial f}{\partial x} G_1 - \frac{\partial f}{\partial y} G_2 + G_3 \right) dx dy \quad (3)$$

b) Probar directamente de la definición de integral vectorial sobre trayectorias, que

$$\int_{\partial S} F \cdot d\vec{r} = \int_{\partial D} H \cdot d\vec{r} \quad (4)$$

donde H es el campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ dado por

$$H(x, y) = \left(F_1(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), F_2(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right).$$

c) Aplique el Teorema de Green al campo H dado en el inciso anterior.

d) Aplique la igualdad (3) al campo $G = \text{rot}(F)$, y concluya.