Auxiliar N° 1: MA26B Matemáticas Aplicadas

Profesor: Alberto Mercado
Auxiliares: Miguel Concha - Germán Ibarra

19 de Marzo de 2007

Definición: Un conjunto $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ se llamara Curva si existe una función continua $\vec{\sigma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ llamada parametrización de la curva, tal que

$$\Gamma = \{\vec{\sigma}(t) : t \in [a,b]\}$$

Luego diremos que la curva Γ es :

1. *Suave*: si admite una parametrización de clase C^1
2. *Regular* : si admite una parametrización suave $\vec{\sigma}$ tal que $\|\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t)\| > 0$, para todo $t \in I$
3. *Simple*: Si admite una parametrización inyectiva (i.e. no hay puntos multiples)

Definición: Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{\sigma}[a,b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización regular. Definimos la longitud de arco $s : [a,b] \to [0, L(\Gamma)]$ como

$$s(t) = \int_a^t \|\frac{d\vec{\sigma}}{du}(u)\| du$$

Definiciones:
Vector Tangente:

$$\hat{T} = \frac{\vec{\sigma(t)}}{\|\vec{\sigma(t)}\|}$$

Curvatura:

$$k(s) = \|\frac{d\hat{T}}{ds}\|$$

Vector Normal:

$$\hat{N} = \frac{\frac{d\hat{T}}{ds}}{\|\frac{d\hat{T}}{ds}\|}$$

Vector Binormal:

$$\hat{T} \times \hat{N}$$

P1.- La Cicloide se define como el lugar geometrico descrito por un punto solidario a una rueda (de radio R) que gira sin resbalar.

(i) Encontrar la parametrización para el caso general en que el radio de la circunferencia es R y el punto solidario se encuentra a una distancia a del centro. Analice regularidad para los casos $a < R$, $a > R$ y $a = R$.
De ahora en adelante considere los valores $R = a = 1$

(ii) Encuentre la parametrización en longitud de arco.

(iii) Encuentre el vector Tangente, la Curvatura, Vector Normal y Binormal.

(iv) Encuentre la parametrización de una recta tangente a la cicloide en un angulo α fijo.

Solución:

(i) Primero hay que entender como se vera la curva. De acuerdo a la relación entre a y R la Cicloide se vera de la siguiente manera:

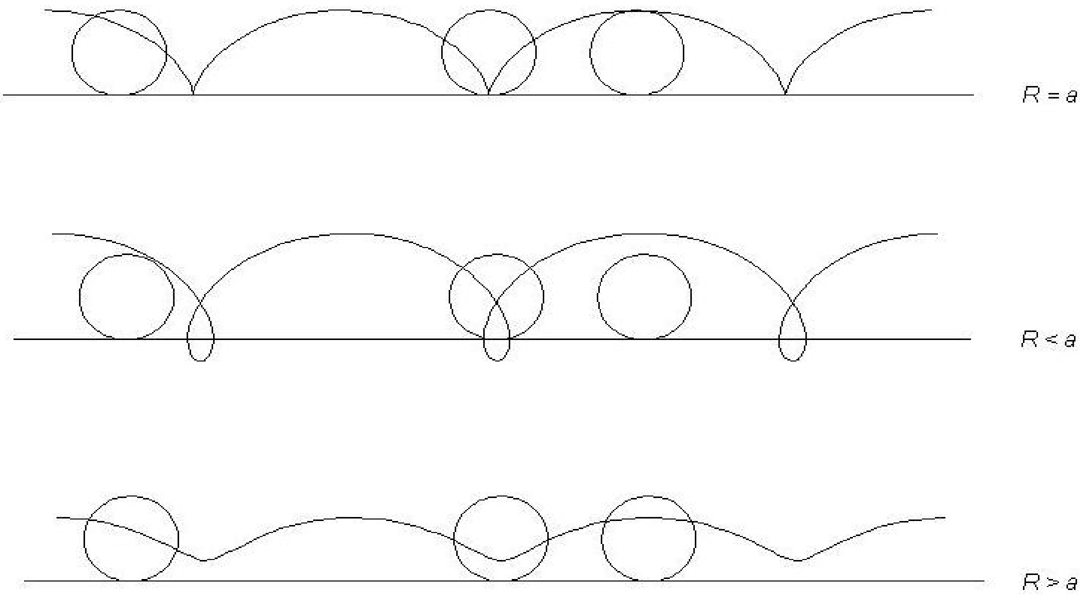

Figura 1: Cicloide

Para analizar el comportamiento del punto conviene considerar el movimiento del centro y a partir de este ubicar el punto. Considerando esto, la parametrización queda:

$$\vec{\sigma}(\theta) = (R\theta, R) + (-a\sin(\theta), -a\cos(\theta))$$

$$\vec{\sigma}(\theta) = (R\theta - a\,\mathrm{sen}(\theta), R - a\cos(\theta))$$

Como se utiliza a lo largo de todo el problema, hay que calcular la velocidad o derivada de esta parametrización y su norma:

$$\vec{\sigma}'(\theta) = (R - a\cos(\theta), a\,\mathrm{sen}(\theta))$$

$$\|\vec{\sigma}'(\theta)\|^2 = (R - a\cos(\theta))^2 + (a\,\mathrm{sen}(\theta))^2$$

Si en algun momento la norma se hiciera 0, la curva no sería regular. Para que esto ocurra ambos terminos de la suma deberian ser cero (ya que los dos estan al cuadrado), veamos si esto es posible en algun caso. Del primer termino (el de la derecha), al igualarlo a cero, se puede concluir que $\cos(\theta) = R/a$. En el caso $R > a$ siempre la razon $R/a > 1$, como el $\cos(\theta)$ no puede ser nunca mayor que 1, el primer termino, en este caso, nunca podra ser 0, por lo que la curva sera regular.
Para el caso $a < R$ el $\cos(\theta)$ puede ser 0, ya que la razón $R/a < 1$ sin embargo el segundo termino, $a\,\mathrm{sen}(\theta)$ tiene que ser cero tambien, situación que ocurrira solo cuando $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Cuando se reemplaza este valor en el $\cos(\theta)$ este toma solo los valores 1 y -1. Por lo tanto, para que la norma $\|\vec{\sigma}'(\theta)\| = 0$, la razon R/a tiene que ser 1, lo que se logra solo cuando $R = a$.
Segun esto, la curva sera regular para cualquier relacion entre R y a, excepto cuando $R = a$.

(ii) Al considerar $R = a = 1$ la parametrizacion y su derivada quedan:

$$\vec{\sigma}(\theta) = (\theta - \mathrm{sen}(\theta), 1 - \cos(\theta))$$

$$\vec{\sigma}'(\theta) = (1 - \cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta))$$

Primero calculemos el largo que de la cicloide al dar una vuelta, esto quiere decir cuando $\theta \in [0, 2\pi]$, el cual esta determinado segun la siguiente integral:

$$L = \int_0^{2\pi} \|\vec{\sigma}'(\theta)\| d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos(\theta))} d\theta$$

Para poder resolver esta integral y porque será necesario más adelante, recordemos las siguientes identidades:

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) \quad (1)$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 \quad (2)$$

Ocupando la identidad (2), la integral anterior se puede escribir como

$$L = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2} \cdot \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) d\theta = 2(-2\cos(\frac{\theta}{2}))|_0^{2\pi} = 4(1 + 1) = 8$$

Escribamos ahora el paremetro s, longitud de arco, segun la definición anterior como:

$$s(\theta) = \int_0^{\theta} \|\vec{\sigma}'(u)\| du = \int_0^{\theta} \sqrt{2(1 - \cos(u))} du$$

Al igual que en el caso anterior, esta integral se puede escribir como:

$$s(\theta) = \sqrt{2}\int_0^{\theta} \sqrt{2} \cdot \operatorname{sen}(\frac{u}{2}) du = 2(-2\cos(\frac{u}{2}))|_0^{\theta} = 4(1 - \cos(\frac{\theta}{2}))$$

De aquí se puede despejar el parametro θ en función de s, luego:

$$\cos(\frac{\theta}{2}) = 1 - \frac{s}{4} \Rightarrow \theta(s) = 2\arccos(1 - \frac{s}{4})$$

Ocupando un triangulo rectagulo y Pitagoras (Recordar que las funciones inversas de las trigonometricas entregan como imagen un angulo) se puede ver que:

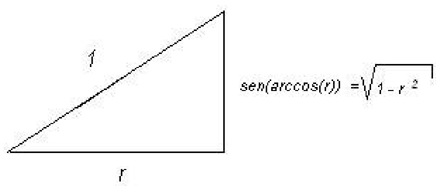

Figura 2: Simplifación de $\operatorname{sen}(\arccos(r))$

Ocuparemos esto, $\operatorname{sen}(\arccos(r)) = \sqrt{1 - r^2}$, al reescribir la parametrización. Considerando las identidades (1) y (2) para el angulo doble, y reemplazando $\theta(s)$en la parametrización de $\vec{\sigma}()$se puede concluir que la parametrización en longitud de arco es:

$$\gamma(s) = (2\arccos(1 - \frac{s}{4}) - \operatorname{sen}(2\arccos(1 - \frac{s}{4})), 1 - (2(1 - \frac{s}{4})^2 - 1))$$

$$(2\arccos(1 - \frac{s}{4} - 2(\frac{s}{2} - \frac{s^2}{16})(1 - \frac{s}{4}), 2 - s(1 - \frac{s}{8}))$$

(iii) Segun las definicónes de los vectores, para poder calcularlos, habria que derivar la parametrización en longitud de arco en función del parametro s. Por lo complicado de la expresión de esta parametrización, convendria ocupar la que se obtuvo en un principio. Para ello, notemos lo siguiente:

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \frac{d\hat{T}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\hat{T}}{dt} / \|\vec{\sigma'(t)}\|$$

La primera igualdad se justifica por la regla de la cadena y la segunda porque:

$$s(t(s)) = t \quad \text{Al derivar con respecto a t queda } \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}}$$

Ocupando esto, se pueden escribir el Vector Normal y la curvatura como:

$$k(t) = \frac{\|\frac{d\hat{T}}{dt}\|}{\|\vec{\sigma'(t)}\|} \text{ y } \hat{N} = \frac{\frac{d\hat{T}}{dt}}{\|\frac{d\hat{T}}{dt}\|}$$

Esto es lo que se hace en la practica, asi que Recuerdenlo!. Con esto calculamos la Tangente, Normal y Curvatura:

$$\hat{T} = \frac{\vec{\sigma'(t)}}{\|\vec{\sigma'(t)}\|} = \frac{(1 - \cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))}{\sqrt{2(1 - \cos(\theta))}}$$

Ocupando, otra vez, las identidades (1) y (2) se obtiene que:

$$\hat{T} = \frac{(2\operatorname{sen}^2(\frac{\theta}{2}), \operatorname{sen}(\theta))}{2\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})} = (\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}), \cos(\frac{\theta}{2}))$$

Donde la primera igualdad se puede escribir considerando que la parte positiva de la raiz y en la segunda exceptuando el caso $\theta = 2k\pi$

Notemos ahora que:

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = (\frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{2}, -\frac{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}{2})$$

$$\Rightarrow k(t) = |\frac{1}{4\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}|$$

$$\hat{N} = \frac{(\frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{2}, -\frac{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}{2})}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = (\cos(\frac{\theta}{2}), -\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}))$$

Para verificar, se tiene que cumplir que la norma del vector Tangente y del vector Normal es 1, lo que ocurre en estos casos. Además, se tiene que:

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N} = (0, 0, -1)$$

(iv) Para cualquier recta , si se conoce un punto p de ella y su tangente T, esta se puede parametrizar de la siguiente forma:

$$\vec{\nu(t)} = T \cdot t + p$$

En este caso, queremos encontrar una parametrización de una recta tangente a la cicloide en un punto determinado por el angulo fijo α. Graficamente, se veria algo como lo siguiente:

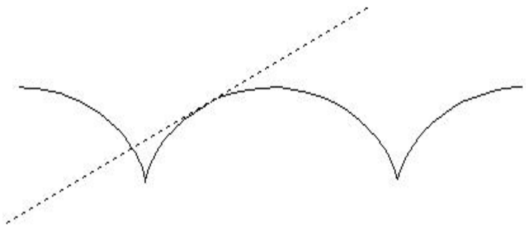

Figura 3: Recta Tangente a un punto fijo

En este caso, la tangente estará determinada por el Vector Tangente, previamente calculado, evaluado en este α y el punto por la parametrización evaluada en el mismo. Segun esto, llamaremos:

$$\hat{T}_\alpha = (\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}), \cos(\frac{\alpha}{2})) \text{ y } P_\alpha = (\alpha - \operatorname{sen}(\alpha), 1 - \cos(\alpha))$$

A la Tangente y al punto que determinan la recta tangente a la Cicloide cuando la circunferencia ha girado un angulo α. Segun esto la parametrización de la recta queda:

$$\nu(\vec{t}) = \hat{T}_\alpha \cdot t + C_\alpha = (\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}), \cos(\frac{\alpha}{2}))t + (\alpha - \operatorname{sen}(\alpha), 1 - \cos(\alpha))$$

$$= (t \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}) + \alpha - \operatorname{sen}(\alpha), t\cos(\frac{\alpha}{2}) + 1 - \cos(\alpha))$$

$$= (\alpha, 2) + (\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2})(t - 2\cos(\frac{\alpha}{2})), \cos(\frac{\alpha}{2})(t - 2\cos(\frac{\alpha}{2})))$$

$$\Rightarrow \nu(\vec{t}) = (\alpha, 2) + (\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}), \cos(\frac{\alpha}{2})(t - 2\cos(\frac{\alpha}{2})$$